

Ein Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung des
Einflusses der vorzeitigen Vertragsauflösungen
auf die Tarifprämien und Gewinnanteile
in der Lebensversicherung

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität Basel

von
Jacques Röthlisberger
aus Basel

Verlag P. G. Keller Winterthur 1960

1957

Ein Verfahren zur näherungsweise Ermittlung des
Einflusses der vorzeitigen Vertragsauflösungen
auf die Tarifprämien und Gewinnanteile
in der Lebensversicherung

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität Basel

von
Jacques Röthlisberger
aus Basel

Verlag P. G. Keller Winterthur 1960

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag der

Herren *Professoren Dr. E. Zwinggi und Dr. M. Gürtler.*

Basel, den 17. Dezember 1957

Prof. Dr. W. Becker
Dekan



Meinen Eltern
in Dankbarkeit gewidmet

Inhalt

I. Abschnitt:

Seite

Der Storno als Ausscheideursache	7
--	---

II. Abschnitt:

Der Einfluss des Stornos auf die Tarifprämien und Gewinnanteile (Die exakten formelmässigen Zusammenhänge).	12
§ 1. Die gemischte Versicherung	12
§ 2. Die Versicherung auf bestimmte Verfallzeit	30
§ 3. Die gemischte Versicherung auf das erste Leben bei zwei verbundenen Leben	35

III. Abschnitt:

Ein Näherungsverfahren zur Bestimmung des Einflusses des Stornos auf die Tarifprämien und Gewinnanteile	38
§ 1. Die gemischte Versicherung	39
§ 2. Die Versicherung auf bestimmte Verfallzeit	55
§ 3. Die gemischte Versicherung auf das erste Leben bei zwei verbundenen Leben	57

IV. Abschnitt:

Numerische Auswertung der Formeln von Abschnitt II; Prüfung der Näherungsformeln von Abschnitt III	59
Zusammenfassung.	74
Literaturverzeichnis	76

I. Abschnitt

Der Storno als Ausscheideursache

Untersuchungen über den Verlauf des Stornos in Abhängigkeit vom Alter des Versicherten, von der vertraglichen und verflossenen Versicherungsdauer, von der Versicherungssumme, von der politischen und wirtschaftlichen Lage des Geschäftsgebietes usw. sind recht selten im Vergleich zu der Anzahl der Abhandlungen über die Sterblichkeit und die sie beeinflussenden Umstände, obwohl den Versicherungsunternehmungen jährlich wesentlich mehr Versicherte durch die vorzeitigen Vertragsauflösungen als durch die „normale“ Abgangsursache „Tod“ verloren gehen. Die folgenden Ausführungen über den Storno als Ausscheideursache bei der Todes- und Erlebensfallversicherung können sich daher auf nur wenige Veröffentlichungen stützen. Beinahe jeder dieser Arbeiten liegt das Beobachtungsmaterial einer anderen Versicherungsgesellschaft zugrunde. Die Untersuchungen beziehen sich auf mehrere Länder; sie beruhen teils auf neuesten Erhebungen, teils auf Erfahrungen, die schon vor etlichen Jahrzehnten gesammelt worden sind. Gleichwohl stimmen die Ergebnisse der meisten Arbeiten in ihren Aussagen über den allgemeinen Verlauf des Stornos weitgehend überein. Die vorzeitige Vertragsauflösung als Abgangsursache zeigt ein typisches, bei allen Gesellschaften nämlich Verhalten gegenüber bestimmten, zum Teil schon erwähnten Faktoren.

Die Stornowahrscheinlichkeiten hängen – im Gegensatz zu den Sterbewahrscheinlichkeiten – in viel höherem Masse von der seit Vertragsbeginn verstrichenen Zeit als vom erreichten Alter des Versicherten ab. Der Einfluss der verflossenen Versicherungsdauer ist derart bedeutend, dass sie – in erster Näherung – allein als bestimmend für die Höhe der Stornofrequenzen angesehen werden kann. Die Stornowahrscheinlichkeit ist bei gleichbleibenden Wirtschaftsverhältnissen im ersten Versicherungsjahr am grössten, sie sinkt rasch mit zunehmender abgelaufener Versicherungsdauer; einzig im Ver-

sicherungsjahr, in dem bei Vertragsauflösung erstmals eine Abgangsentschädigung gewährt wird, steigt sie gegenüber der Stornowahrscheinlichkeit im Vorjahr leicht an. K. G. Hagstroem¹⁾ versucht, die Abhängigkeit der Stornofrequenzen von der verstrichenen Versicherungsdauer durch das folgende Bild zu veranschaulichen und zu deuten. Er vergleicht unter anderen auch die Versicherungsnehmer, die eine Lebensversicherung mit fortlaufender Prämienzahlung gezeichnet haben, mit Teilnehmern an einem Wettgehen, bei dem die Intensität des Ausscheidens der Konkurrenten aus dem Wettkampf umgekehrt proportional der seit dem Start zurückgelegten Wegstrecke ist – ein Aufgeben in unmittelbarer Nähe des Startpunktes wird dabei ausgeschlossen. Je länger also der Versicherungsvertrag schon besteht, desto kleiner wird im allgemeinen die Frequenz der vorzeitigen Ausstritte. Das regelmässige Entrichten der Prämie wird als eine Ausdauerprobe betrachtet, die derjenigen bei dem geschilderten sportlichen Wettkampf ähnlich ist. Mit diesem Vergleich kann das Wesen des Stornoverlaufs in der Versicherungszeit natürlich nur annähernd erfasst werden. Es wird nämlich stillschweigend vorausgesetzt, dass sich die äusserlichen Wettkampfbedingungen während der Konkurrenz nicht ändern, d.h. die persönlichen, insbesondere die wirtschaftlichen Verhältnisse jedes Versicherten werden als gleichbleibend während der ganzen Versicherungsdauer angesehen; zudem wird angenommen, dass das Interesse, die Ausdauerprüfung zu bestehen, während des Wettbewerbs nicht erlahme, d.h. es wird nicht berücksichtigt, dass das Versicherungsbedürfnis während der Vertragszeit sich vermindern oder gar wegfallen kann.

Bekanntlich haben Veränderungen der wirtschaftlichen Verhältnisse der Versicherten die grössten Auswirkungen auf die Höhe des vorzeitigen Abgangs. Das Einkommen des Prämienzahlers gehört zu den wesentlichsten der die Stornorate beeinflussenden Faktoren. Je grösser und je regelmässiger das Einkommen ist, desto niedriger ist im allgemeinen die Anzahl der vorzeitigen Vertragsauflösungen. Änderungen der wirtschaftlichen Lage des Geschäftsgebietes machen sich in

¹⁾ K. G. Hagstroem: Die Einkommensausgleichung in Schweden. Vierteljahresbericht der statistischen Abteilung der Skandinaviska Banken, April 1944.

den privatwirtschaftlichen Verhältnissen vieler Versicherten geltend und sind darum von grosser Bedeutung für die Höhe des anomalen Abgangs. Vor allem die Stornohäufigkeiten in den späteren Versicherungsjahren werden von Konjunkturschwankungen betroffen; in den ersten Jahren der Versicherungsdauer wird dagegen der Storno mehr von der „Qualität des angeworbenen Geschäftes“ beeinflusst. Nach K. Rasch (4)¹⁾ „ist der regelwidrige Abgang infolge Verzicht nicht auf unmittelbares wirtschaftliches Unvermögen des Versicherten zurückzuführen, sondern ist einzig und allein die Folge einer unzweckmässigen Anwerbetätigkeit und eines illoyalen Konkurrenzkampfes“. Die Stornowahrscheinlichkeiten in den ersten Versicherungsjahren können von Gesellschaft zu Gesellschaft sehr verschieden sein, je nach der Ausbildung und den Anwerbemethoden ihrer Agenten; innerhalb eines bestimmten Unternehmens sind sie in der Zeit jedoch wesentlich geringeren Schwankungen unterworfen als die Stornowahrscheinlichkeiten in den folgenden Versicherungsjahren. Diese können in der Zeit ausserordentlich grosse Unterschiede aufweisen. Als Erläuterung dazu seien die Erfahrungen einer amerikanischen Versicherungsgesellschaft (19) angeführt. Der höchste Stornosatz in den ersten zwei Versicherungsjahren zusammen (= Summenverlust infolge Stornos in den ersten zwei Versicherungsjahren in % des Neugeschäftes) betrug bei dem betreffenden Unternehmen in der Zeit von 1910 bis 1950 nur doppelt soviel als der tiefste; dagegen war der Stornosatz für Versicherungen mit mehr als zwei zurückgelegten Versicherungsjahren (= Summenverlust infolge Stornos bei Versicherungen mit mehr als zwei verflossenen Versicherungsjahren in % des zugehörigen Summenbestandes) im Jahre 1933 zehnmal grösser als derjenige vom Jahre 1945.

Bei kurzfristigen Verträgen ist die Abhängigkeit des Stornos von der wirtschaftlichen und politischen Lage besonders ausgeprägt. Wie eine Untersuchung von E. Zwinggi (16) ergeben hat, wirkte sich die Wirtschaftsdepression zu Beginn der Dreissigerjahre am stärksten auf die Stornofrequenzen der Versicherungen mit kurzer Laufzeit aus; der

¹⁾ Die in den Klammern beigefügte Zahl weist auf die Nummer der im Literaturverzeichnis angeführten Arbeit hin.

anomale Abgang der Versicherungen mit mittleren und langen Vertragsdauern wurde von der Krise in geringerem Masse beeinflusst. Derselben Arbeit ist weiter zu entnehmen, dass bei Kriegsausbruch im Jahre 1939 sich der Storno der kurzfristigen Verträge vervielfachte, während der vorzeitige Abgang der mittel- und langfristigen Versicherungen praktisch nicht berührt wurde. Bei Versicherungen, die in erster Linie einen Sparzweck erfüllen, d. h. deren vornehmliche Aufgabe in der Bildung einer allgemeinen finanziellen Reserve besteht, ist der vorzeitige Abgang gegenüber Konjunkturschwankungen empfindlicher als bei Versicherungen, die vorwiegend zur Risikodeckung abgeschlossen worden sind.

Manche Merkmale der Versicherten und der Policen, wie Eintrittsalter bzw. erreichtes Alter, Geschlecht, Beruf, Versicherungssumme, Prämienzahlungsmodalität, Dividendenplan usw., weisen eine enge Korrelation mit dem Einkommen der Versicherten auf und sind zum Teil auch voneinander nicht unabhängig. Im allgemeinen hält es daher schwer, den Einfluss eines einzelnen dieser Attribute auf den Storno zu messen, denn eine solche Untersuchung erforderte eine derart mannigfaltige Aufteilung des Beobachtungsmaterials, dass die Teilbestände infolge ihrer Kleinheit vielfach keine gesicherten Ergebnisse zu vermitteln vermöchten.

Bei gleicher abgelaufener Versicherungsdauer fallen in der Regel die Stornowahrscheinlichkeiten mit steigendem Eintrittsalter bzw. erreichtem Alter vom Abschlussalter 20 an. Die Ursache dafür dürfte in den im allgemeinen günstigeren wirtschaftlichen Verhältnissen der mittleren und vor allem der höheren Altersklassen liegen. In den höheren Beitrittsaltern wird zwar auch nicht selten ein Ansteigen der Stornohäufigkeiten beobachtet; der Versicherungsbedarf kann sich nämlich besonders in den höheren Lebensaltern wesentlich verringern und damit den Rücktritt vom Verträge begünstigen – z. B. beim Ableben der Ehefrau des Versicherten, wenn dessen Kinder bereits erwerbstätig und somit wirtschaftlich vom Vater unabhängig sind.

Zwischen der Stornohäufigkeit und der Versicherungssumme ist kein direkter, eindeutiger Zusammenhang festzustellen. Die „Vertragstreue“ ist zwar mit wachsender Versicherungssumme eher etwas besser; dies dürfte jedoch restlos durch den Umstand erklärt werden,

dass sich die Versicherten mit höheren Versicherungssummen im allgemeinen in einer günstigeren wirtschaftlichen Lage befinden.

Die Prämienzahlungsweise hat dagegen eine wesentliche Bedeutung für das Ausmass des vorzeitigen Abgangs. Bei jährlicher Prämienzahlung ist der Storno niedriger als bei unterjähriger Zahlungsweise, bei halbjährlicher Entrichtung der Prämien ist er seinerseits geringer als bei vierteljährlicher Zahlung. Man mag geneigt sein, diese Tatsache wiederum auf wirtschaftliche Ursachen zurückzuführen, da die Prämienzahlungsweise weitgehend von den finanziellen Verhältnissen des einzelnen Versicherten abhängt. Indessen besteht selbst in einem Bestande, der sich aus lauter Versicherten einer bestimmten Einkommensschicht zusammensetzt, der nämliche Zusammenhang zwischen Storno und Prämienzahlungsmodalität.

Untersuchungen über die Häufigkeit der vorzeitigen Austritte bei weiblichen Versicherten sind äusserst spärlich. Die Ergebnisse, wonach der Storno bei Frauen – und zwar unabhängig von ihrem Zivilstand – beachtlich niedriger ist als bei männlichen Versicherten, mögen daher nur als erste Anhaltspunkte betrachtet werden¹⁾.

Die gute gesundheitliche Verfassung der einzelnen Versicherten, die früher oft als ein den Storno wesentlich begünstigender Umstand gegolten hat, übt kaum einen messbaren Einfluss auf die Höhe des vorzeitigen Abgangs aus.

In Ermangelung geeigneter statistischer Grundlagen wird man in der Praxis nicht selten vor die Aufgabe gestellt sein, Hypothesen über das Ausmass und den Verlauf des anomalen Abgangs zu treffen. Die Beachtung der im vorhergehenden besprochenen Eigenheiten des Stornos als Ausscheideursache kann dabei vor Annahmen bewahren, die den bisherigen allgemeinen Erfahrungen wesentlich widersprechen würden.

¹⁾ Die Ausführungen über die Abhängigkeit des Stornos von der Versicherungssumme, von der Prämienzahlungsweise und vom Geschlecht des Versicherten stützen sich auf Beobachtungen in überseeischen Ländern und brauchen demnach für schweizerische Verhältnisse nicht unbedingt volle Geltung zu haben.

II. Abschnitt

Der Einfluss des Stornos auf die Tarifprämien und Gewinnanteile (Die exakten formelmässigen Zusammenhänge)

Wir betrachten vornehmlich die gemischte Versicherung auf ein Leben mit Gewinnbeteiligung. Diese Versicherungsform hat in der Privatversicherung bekanntlich praktisch weitaus die grösste Bedeutung. Andere gebräuchliche Formen der Todes- und Erlebensfallversicherung, wie die Versicherung auf bestimmte Verfallzeit und die gemischte Versicherung auf zwei Leben, behandeln wir nur so weit, als sie sich in den Ableitungen wesentlich von der gemischten Versicherung auf ein Leben unterscheiden¹⁾.

§ 1

Die gemischte Versicherung

Wir bestimmen vorerst den Barwert der Stornogewinne (Stornoverluste)²⁾. Der Einfluss des vorzeitigen Abgangs auf die Höhe der Prämien bzw. Dividenden lässt sich danach mit verhältnismässig wenig Mühe ermitteln.

Sämtliche Rechnungsvoraussetzungen seien Grundlagen 2. Ordnung. Wir bezeichnen sie wie folgt:

- $*q_{[x]+t}$: abhängige einjährige Sterbewahrscheinlichkeit, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass ein $[x] + t$ -jähriger Versicherter im folgenden Jahre im „vertragstreuen Zustand“ stirbt;
 $q_{[x]+t}$: unabhängige einjährige Sterbewahrscheinlichkeit, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass ein $[x] + t$ -jähriger Versicherter im

¹⁾ Die gemischte Versicherung auf ein Leben wird künftighin der Einfachheit halber kurz gemischte Versicherung genannt.

²⁾ Die Bezeichnung Stornogewinne umfasse in Zukunft neben den eigentlichen Stornogewinnen auch die Stornoverluste (= „negative Stornogewinne“).

folgenden Jahre überhaupt stirbt $-q_{[x]+t}$ ist Grundlage für die Prämienberechnung, wenn nur die Abgangsursache „Tod“ in die Rechnung einbezogen wird;

${}^*s_{[x]+t}$: abhängige einjährige Stornowahrscheinlichkeit, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass ein $[x] + t$ -jähriger Versicherter innert Jahresfrist den Versicherungsvertrag vorzeitig auflöst – sie erfasst keine Teilrückkäufe und keine Beitragsfreistellungen;

$s_{[x]+t}$: unabhängige einjährige Stornowahrscheinlichkeit, d. h. Austrittswahrscheinlichkeit, wenn der Storno die einzige Abgangsursache wäre;

$l_{[x]+t}$: Überlebensordnung, mit

$$l_{[x]+t} = l_{[x]} \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - q_{[x]+\tau}); \quad (1)$$

$l_{[x]+t}^d$: Dekremententafel der Versicherten, mit

$$\left. \begin{aligned} l_{[x]+t}^d &= l_{[x]}^d \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - q_{[x]+\tau}) (1 - s_{[x]+\tau}) = \\ &= l_{[x]}^d \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - {}^*q_{[x]+\tau} - {}^*s_{[x]+\tau}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei zwischen den abhängigen und den unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten die Beziehungen bestehen

$$\begin{aligned} {}^*q_{[x]+\tau} &\sim q_{[x]+\tau} \left(1 - \frac{s_{[x]+\tau}}{2}\right), \\ {}^*s_{[x]+\tau} &\sim s_{[x]+\tau} \left(1 - \frac{q_{[x]+\tau}}{2}\right); \end{aligned}$$

wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit für alle folgenden Ableitungen $l_{[x]}^d = l_{[x]}$ setzen, d.h. die beiden fiktiven Ausgangsbestände sollen ziffernmässig übereinstimmen; dann können wir unter Berücksichtigung von (1) und (2) die Dekremententafel für $t > 0$ auch mit Hilfe von

$$l_{[x]+t}^d = l_{[x]+t} \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - s_{[x]+\tau}) \quad (3)$$

berechnen;

- i : Zinsfuß, $\frac{1}{1+i} = v$, $1 - v = d$;
 α : Abschlusskostensatz in ‰ der Versicherungssumme;
 β : Satz der laufenden Verwaltungskosten (Inkassokosten) in ‰ der Tarifprämie bzw. Barprämie (Barprämie = Tarifprämie – verrechneter Gewinnanteil);
 γ : Satz der laufenden Verwaltungskosten in ‰ der Versicherungssumme;
 $A_{[x]+t}$: Gewinnanteil, welcher zu Beginn des $(t+1)$. Versicherungsjahres ausgeschüttet wird – für die Rechnung werden die Dividenden als versicherte Leistungen betrachtet;
«1» : Versicherungsleistung im Todes- oder Erlebensfall, rechnungsmässig Ende Versicherungsjahr fällig;
 ${}_{t+1}U_{[x]\overline{n}}$: Abfindungswert im Stornofall, kommt rechnungsmässig Ende des $(t+1)$. Versicherungsjahres zur Auszahlung;
 $\pi_{[x]\overline{n}}$: Unveränderliche Tarifprämie, ohne Berücksichtigung des Stornos als Ausscheideursache, jährlich vorschüssig zahlbar;
 n = Versicherungsdauer = Prämienzahlungsdauer.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir künftig darauf verzichten, die Klammern $[]$ um x mitzuführen.

Die Tarifprämie $\pi_{x\overline{n}}$, welche sich aus der Äquivalenzgleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi_{x\overline{n}}}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t} = \frac{1}{l_x} \left\{ \alpha l_x + \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} l_{x+t} q_{x+t} + v^n l_{x+n} + \right. \\
 \left. + (\beta \pi_{x\overline{n}} + \gamma) \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t} + \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t} A_{x+t} \right\}^1
 \end{aligned} \tag{4}$$

ergibt, ist bei rechnungsmässigem Verlauf der Ereignisse im Durchschnitt für den Versicherer gerade ausreichend, um

- die Aufwendungen für die Todes- und Erlebensfalleistungen,
- die Unkosten der Werbung und der Verwaltung der Versicherung,
- die Auslagen durch die Dividendenzahlungen

¹⁾ Wir nehmen vorläufig an, die Gewinnanteile würden nicht mit der Tarifprämie verrechnet.

decken zu können. Werden dagegen der Storno als Ausscheideursache und die Abfindungswerte als „Versicherungsleistungen“ in Gleichung (4) miteinbezogen – bei sonst unveränderten Annahmen über den Zinsfuß, die Verwaltungskosten, den Verlauf der Sterblichkeit und der Gewinnanteile –, wird aber die gewöhnliche Tarifprämie $\pi_{x|\bar{n}}$ als Entgelt der Versicherten beibehalten, so besteht im allgemeinen zwischen dem Barwert der Prämienzahlungen

$$\frac{\pi_{x|\bar{n}}}{l_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}^d \quad (5)$$

und dem Barwert der Anwartschaft auf die Gesamtheit der Versicherungsleistungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_x^d} \left\{ \alpha l_x^d + \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} l_{x+t}^d * q_{x+t} + v^n l_{x+n}^d + \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} l_{x+t}^d * s_{x+t} \cdot {}_{t+1}U_{x|\bar{n}} + \right. \\ & \left. + (\beta \pi_{x|\bar{n}} + \gamma) \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}^d + \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}^d \Delta_{x+t} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

keine Gleichheit mehr. Der Unterschied zwischen den beiden Barwerten stellt den Barwert der Stornogewinne G dar, d. h. es ist

$$G = (5) - (6). \quad (7)$$

Fügen wir in (6) $\frac{1}{l_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} l_{x+t}^d * s_{x+t}$ zum zweiten Gliede hinzu, subtrahieren wir zur Kompensation denselben Ausdruck vom vierten Gliede und berücksichtigen wir schliesslich, dass

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} l_{x+t}^d (*q_{x+t} + *s_{x+t}) + v^n l_{x+n}^d = l_x^d - d \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}^d \quad (8)$$

– in Analogie mit

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} l_{x+t} q_{x+t} + v^n l_{x+n} = l_x - d \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t},$$

dann erhält (6) die Gestalt

$$\frac{1}{l_x^d} \left\{ (1 + \alpha) l_x^d - d \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}^d - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} l_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}}) + \right. \\ \left. + (\beta \pi_{x\bar{n}} + \gamma) \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}^d + \sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}^d \Delta_{x+t} \right\}. \quad (9)$$

Es ist somit auch $G = (5) - (9)$. Wenn wir in dieser Differenz die einzelnen Glieder entsprechend zusammenordnen und noch die diskontierten Zahlen der „Vertragstreuen“ $D_{x+t}^d = v^{x+t} l_{x+t}^d$ einführen, gelangen wir zu der folgenden Beziehung für den Barwert der Stornogewinne

$$G = - \left\{ 1 + \alpha - \frac{(1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} + d - \gamma}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d - \right. \\ \left. - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}}) + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} \right\}. \quad (10)$$

Diese Formel ist für die praktischen Berechnungen geeigneter als (7). Sehen wir von α ab, dann ist der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von (10) eine Darstellung für das prospektive vollständige Deckungskapital in $t = 0$ unter Einbezug der vorzeitigen Vertragsauflösung als zweite Abgangsursache. Wir können daher auch schreiben

$$G = - \{ \alpha + {}_0V_{x\bar{n}}^{vp} [\text{m. S.}] \}.$$

Für das vollständige Deckungskapital ohne Berücksichtigung des Stornos bestehen in $t = 0$ andererseits die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} {}_0V_{x\bar{n}}^v [\text{retrospektiv, ohne Storno}] &= {}_0V_{x\bar{n}}^{vr} [\text{o. S.}] = -\alpha = \\ &= {}_0V_{x\bar{n}}^v [\text{prospektiv, ohne Storno}] = {}_0V_{x\bar{n}}^{vp} [\text{o. S.}] = \\ &= 1 - \frac{(1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} + d - \gamma}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} + \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} \Delta_{x+t}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Daher gilt auch

$$G = {}_0V_{x\bar{n}}^{vp} [\text{o. S.}] - {}_0V_{x\bar{n}}^{vp} [\text{m. S.}], \quad (12)$$

d.h. der Barwert der Stornogewinne ist gleich der Differenz in $t = 0$ zwischen dem prospektiven vollständigen Deckungskapital, ermittelt nach Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung ohne Einschluss des Stornos, und dem prospektiven vollständigen Deckungskapital, ermittelt mit denselben Rechnungsgrundlagen, jedoch unter Einbezug des Stornos als zweite Abgangsursache. Die Richtigkeit dieser Aussage ist unmittelbar einzusehen.

Wenn wir nun in (10) α mit Hilfe von (11) eliminieren, also gemäss (12) die Differenz der beiden prospektiven vollständigen Deckungskapitalien bilden, ergibt sich nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d * s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x|\overline{n}}) - \\
 & - [(1 - \beta) \pi_{x|\overline{n}} + d - \gamma] \left\{ \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \right\} + \\
 & + \left\{ \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} A_{x+t} - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d A_{x+t} \right\}.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Von dieser Beziehung wollen wir ausgehen, um eine weitere, der Form nach von (10) recht verschiedene Bestimmungsgleichung für den Barwert der Stornogewinne herzuleiten. Mittels (1) und (2) lässt sich leicht die Richtigkeit der folgenden Relation überprüfen, wobei $t > 0$ ist,

$$\left. \begin{aligned}
 l_{x+t} - l_{x+t}^d &= (l_{x+t-1} - l_{x+t-1}^d) (1 - q_{x+t-1}) + \\
 &+ l_{x+t-1}^d s_{x+t-1} (1 - q_{x+t-1})^1, \\
 \text{in } t = 0 \text{ gilt} \quad l_{x+t} &= l_{x+t}^d.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

¹⁾ Zur Deutung dieser Formel schreiben wir für die Überlebensordnung

$$l_{x+t} = l_{x+t}^d + (l_{x+t} - l_{x+t}^d), \text{ mit } l_x^d = l_x,$$

d.h. wir denken uns die Gesamtheit der Überlebenden zusammengesetzt aus der Gesamtheit A der „Vertragstreuen“, l_{x+t}^d , und der sich aus A bildenden Gesamtheit B der noch lebenden „vorzeitig Ausgetretenen“, $l_{x+t} - l_{x+t}^d$. Gleichung (14) stellt dann die Rekursionsformel für B dar. Unter der Annahme, das auch in B die

Wir dividieren nun beide Seiten von (14) durch l_{x+t} und summieren danach von $t = 1$ bis $t = k$

$$\sum_{t=1}^k \frac{l_{x+t} - l_{x+t}^d}{l_{x+t}} = \sum_{t=1}^k \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t-1}^d}{l_{x+t}} (1 - q_{x+t-1}) + \sum_{t=1}^k \frac{l_{x+t-1}^d}{l_{x+t}} s_{x+t-1} (1 - q_{x+t-1}). \quad (15)$$

Unter Berücksichtigung, dass $l_x^d = l_x$ ist, lässt sich das erste Glied auf der rechten Seite der obenstehenden Gleichung umformen in $\sum_{t=1}^{k-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t}^d}{l_{x+t}}$. Nach Subtraktion dieser Summe von beiden Seiten von (15) erhalten wir

$$\frac{l_{x+k} - l_{x+k}^d}{l_{x+k}} = \sum_{t=1}^k \frac{l_{x+t-1}^d}{l_{x+t}} s_{x+t-1} (1 - q_{x+t-1})$$

oder, wenn wir noch beide Seiten mit l_{x+k} multiplizieren und $(t-1)$ in t übergehen lassen,

$$l_{x+k} - l_{x+k}^d = l_{x+k} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{l_{x+t}^d}{l_{x+t+1}} s_{x+t} (1 - q_{x+t}).$$

Somit lässt sich die Überlebensordnung darstellen durch

$$\left. \begin{aligned} l_{x+k} &= l_{x+k}^d \quad \text{für } k = 0 \text{ und} \\ l_{x+k} &= l_{x+k}^d + l_{x+k} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{l_{x+t}^d}{l_{x+t+1}} s_{x+t} (1 - q_{x+t}) \frac{1}{l_{x+t+1}} \quad \text{für } k > 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(unabhängige) Sterbewahrscheinlichkeit durch q_{x+t-1} gegeben ist, enthält das erste Glied auf der rechten Seite von (14) diejenigen Überlebenden, welche schon im Zeitpunkt $(t-1)$ B eingegliedert waren, während das zweite Glied diejenigen Überlebenden erfasst, welche erst im Versicherungsjahr $(t-1, t)$ aus A ausgeschieden sind. $s_{x+t-1}(1 - q_{x+t-1})$ ist der Ausdruck für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherter innerhalb $(t-1, t)$ von A in B übertritt und B am Ende des Jahres noch angehört.

Unter Benutzung von (16) kann der Barwert der temporären, vor-
schüssig zahlbaren Leibrente wie folgt zerlegt werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k} &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k}^d + \\ &+ \frac{1}{D_x^d} \sum_{k=1}^{n-1} D_{x+k} \sum_{t=0}^{k-1} l_{x+t}^d s_{x+t} (1 - q_{x+t}) \frac{1}{l_{x+t+1}}. \end{aligned}$$

Wird die Reihenfolge der Summationen in der Doppelsumme um-
gekehrt, danach unter der ersten Summe mit v^{x+t+1} erweitert und
schliesslich in den einfachen Summen der Summationsindex k durch t
ersetzt, dann folgt für den Leibrentenbarwert eine Beziehung, deren
Deutung nicht schwerfällt

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d + \\ &+ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-2} v D_{x+t}^d s_{x+t} (1 - q_{x+t}) \frac{1}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ganz entsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} A_{x+t} &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d A_{x+t} + \\ &+ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-2} v D_{x+t}^d s_{x+t} (1 - q_{x+t}) \frac{1}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} A_{x+k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Gleichungen (17) und (18) verwenden wir nun zur weiteren Um-
formung von (13); es wird

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x|\overline{n}}) - \\ &- \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-2} v D_{x+t}^d s_{x+t} (1 - q_{x+t}) \left\{ \frac{(1 - \beta) \pi_{x|\overline{n}} + d - \gamma}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} A_{x+k} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Wenn wir noch berücksichtigen, dass das prospektive vollständige Deckungskapital ohne Einschluss des Stornos als Abgangsursache im Zeitpunkt $(t + 1)$ gegeben ist durch

$${}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v = 1 - \frac{(1 - \beta)\pi_{x\overline{n}} + d - \gamma}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} + \\ + \frac{1}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} A_{x+k} \text{ für } t < n-1, {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v = 1 \text{ für } t = n-1,$$

dann lässt sich (19) auch schreiben als

$$G = -\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\overline{n}}) - \\ - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d s_{x+t} (1 - q_{x+t}) (1 - {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v) \\ \text{oder} \\ G = \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} ({}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v - {}_{t+1}U_{x\overline{n}}) + \\ + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d [{}^*s_{x+t} - s_{x+t} (1 - q_{x+t})] (1 - {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v). \quad (20)$$

Aus (2) lässt sich ferner leicht ableiten, dass

$${}^*s_{x+t} - s_{x+t} (1 - q_{x+t}) = q_{x+t} - {}^*q_{x+t}. \quad (21)$$

Benutzen wir diese Beziehung in (20), dann bekommt die Formel für G schliesslich die Gestalt¹⁾

$$G = \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} ({}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v - {}_{t+1}U_{x\overline{n}}) + \\ + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d (q_{x+t} - {}^*q_{x+t}) (1 - {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v). \quad (22)$$

¹⁾ Diese Darstellung für den Barwert der Stornogewinne könnte auch unabhängig von den bisherigen Betrachtungen mit Hilfe der Kapital-Ansammlungstheorie von F. P. Cantelli gewonnen werden. Man vergleiche z. B. (5), (15) und (17).

In der praktischen Rechnung dürfte zur Bestimmung von G eher Gleichung (10) verwendet werden; hingegen ermöglicht (22) den besten Einblick in das Wesen der Gewinne aus der vorzeitigen Vertragsauflösung: Man erkennt, dass die Grösse des Stornogewinnes hauptsächlich durch das Verhältnis des vollständigen Deckungskapitals (ohne Einschluss des Stornos als Abgangsursache) zum Abfindungswert bestimmt ist, d. h. der Gewinn in jedem einzelnen Stornofall ist vorwiegend auf die Differenz zwischen der gesamten durchschnittlichen technischen Rücklage für einen Versicherten und der ihm ausgerichteten Abgangsentschädigung zurückzuführen.

Das zweite Glied in (22) enthält die jährlichen Gewinne auf der Risiko-prämie, die infolge der vorzeitigen Austritte von $vq_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v)$ auf $v^*q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v)$ sinkt. Bei einer ersten Abschätzung von G kann dieses Glied vernachlässigt werden, denn seinem Betrage nach ist es klein.

Nun wenden wir uns der Frage zu, welchen Einfluss die Gewinne aus dem vorzeitigen Abgang

- a) auf die Tarifprämie haben, wenn die Dividenden in unveränderter Höhe nach dem ursprünglichen Gewinnplan vergütet werden;
- b) auf die Gewinnausschüttung ausüben, wenn wir annehmen, dass die Versicherten weiterhin die gewöhnliche Tarifprämie (ohne Berücksichtigung des Stornos) entrichten.

Dabei gehen wir von der Voraussetzung aus, dass zwischen der gesamten Belastung des Versicherers (Stornofalleistungen inbegriffen) und den Zahlungen der Versicherten Äquivalenz bestehen soll, d. h. die Gewinne aus den vorzeitigen Vertragsauflösungen sollen in ihrer Gesamtheit an die Versicherten in Form einer Prämienreduktion oder einer Dividendenerhöhung zurückfliessen.

- a) Es ist der Barwert der Prämienermässigungen gleich dem Barwert der Stornogewinne zu setzen. Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass sich die Inkassokosten verringern, wenn die Tarifprämie erniedrigt wird. Bezeichnen wir die Prämie unter Einschluss des Stornos als

zweite Ausscheideursache mit $\pi_{x\overline{n}}^s$, dann lautet somit die Bestimmungsgleichung für die „Stornogewinnprämie“ $(\pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s)$

$$G = \frac{(1 - \beta)(\pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s)}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d. \quad (23)$$

Ist G negativ, verursacht der Storno – im ganzen gesehen – also Verluste, dann ist auch $(\pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s)$ negativ, d. h. die übliche Tarifprämie $\pi_{x\overline{n}}$ genügt nicht als Äquivalent für die Gesamtheit der versicherten Leistungen, sondern muss um den Betrag $(\pi_{x\overline{n}}^s - \pi_{x\overline{n}})$ erhöht werden.

$\pi_{x\overline{n}}^s$ kann auch direkt aus Formel (10) ermittelt werden, indem wir nach demjenigen Wert für die Prämie fragen, der den Barwert der Stornogewinne gleich Null werden lässt; (10) wird damit zur Äquivalenzgleichung der Prämie unter Einbezug des Stornos als Abgangsursache.

b) Es ist der Barwert der Zusatzdividenden $(\Delta_{x+t}^s - \Delta_{x+t})$ gleich dem Barwert der Stornogewinne zu setzen. Im besonderen legen wir fest, dass die Gewinnanteile Δ_{x+t} für alle Alter gleichmässig erhöht werden sollen, d. h. ihre neue Grösse sei

$$\Delta_{x+t}^s = (1 + p) \Delta_{x+t}.$$

p , die von t unabhängige prozentuale Erhöhung der Dividenden Δ_{x+t} , bestimmt sich dann aus

$$G = \frac{p}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t}. \quad (24)$$

Wenn G negativ ist, müssen die Gewinnanteile Δ_{x+t} nach Massgabe von p gekürzt werden zum Ausgleich der Verluste durch die vorzeitigen Austritte.

Zur direkten Berechnung von Δ_{x+t}^s bzw. $(1 + p)$ lässt sich, analog wie zur Bestimmung von $\pi_{x\overline{n}}^s$, Gleichung (10) benutzen.

*

In Abschnitt IV werden zur Ermittlung des zahlenmässigen Einflusses des Stornos auf Prämie und Dividende die Formeln (10), (23)

und (24) verwendet unter folgenden Annahmen über den Verlauf der Gewinnanteile und der Abfindungswerte:

1. Gewinnanteile:

Gewinnplan I sieht vom 4. Versicherungsjahre an eine gleichbleibende, mit der Prämie zu verrechnende Dividende in der Höhe von Δ_1 Prozent der Tarifprämie vor. In (10) und (24) ergibt sich damit die Vereinfachung

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} = \frac{(1-\beta) \pi_{x\overline{n}} \Delta_1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d, \quad (25)$$

und die Gleichung für die Stornogewinnprämie (23) ist in

$$G = \frac{(1-\beta)(\pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s)}{D_x^d} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d - \Delta_1 \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \right\} \quad (26)$$

abzuändern, weil sich infolge der Prämienermässigung die Belastung durch die in Bruchteilen der Prämie ausgedrückten Gewinnanteile vermindert.

Gewinnplan II sieht vom 3. Versicherungsjahre an eine jährlich gleichmässig steigende, mit der Prämie zu verrechnende Dividende vor; sie sei zu Beginn Δ_2 Prozent der Tarifprämie und werde jedes folgende Jahr um diesen Betrag erhöht. Damit wird in (10) und (24)

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} = \frac{(1-\beta) \pi_{x\overline{n}} \Delta_2}{D_x^d} \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{k=t}^{n-1} D_{x+k}^d, \quad (27)$$

und (23) geht über in

$$G = \frac{(1-\beta)(\pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s)}{D_x^d} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d - \Delta_2 \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{k=t}^{n-1} D_{x+k}^d \right\}. \quad (28)$$

2. Abfindungswerte:

Im 1. und im 2. Versicherungsjahr werden im Stornofall keine Abgangsentschädigungen ausgerichtet; in den folgenden Jahren sei der Abfindungswert bestimmt durch die Höhe des mit Rechnungsgrund-

lagen 1. Ordnung berechneten Zillmerdeckungskapitals ${}_{t+1}V'_{x\overline{n}}(\bar{a})$ – der Zillmersatz ist $\bar{a}$, der Akzent weist auf die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung hin –, er betrage jedoch mindestens zwei Drittel des Netto- deckungskapitals ${}_{t+1}V'_{x\overline{n}}$. Ist für $t = t_1$ zum letzten Male $\frac{2}{3} {}_tV'_{x\overline{n}} > {}_tV'_{x\overline{n}}(\bar{a})$, und beachten wir, dass

$${}_{t+1}V'_{x\overline{n}}(\bar{a}) = 1 - \frac{1 + \bar{a}}{\ddot{a}'_{x\overline{n}}} \ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$$

gilt, dann wird in (10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} {}_vD_{x+t}^d * {}_sJ_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\overline{n}}) &= \\ = \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^1 {}_vD_{x+t}^d * {}_sJ_{x+t} + \frac{1 + \bar{a}}{\ddot{a}'_{x\overline{n}}} \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=2}^{n-1} {}_vD_{x+t}^d * {}_sJ_{x+t} \ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} - &(29) \\ - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=2}^{t_1-1} {}_vD_{x+t}^d * {}_sJ_{x+t} \left(\frac{2}{3} {}_{t+1}V'_{x\overline{n}} - {}_{t+1}V'_{x\overline{n}}(\bar{a}) \right), \end{aligned}$$

wobei das dritte Glied auf der rechten Seite nur dann auftritt, wenn $t_1 \geq 3$ ist; die Nettoreserve wird dabei mit

$${}_{t+1}V'_{x\overline{n}} = 1 - \frac{\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\ddot{a}'_{x\overline{n}}} \quad \text{ermittelt.}$$

*

Der Gewinnplan, welcher – statt der Ausrichtung einer jährlichen Dividende Δ_{x+t} – eine jährliche Erhöhung der anwartschaftlichen Versicherungsleistung um K_{x+t} in Aussicht stellt (Bonussystem), ist bis anhin ausser acht gelassen worden. Im folgenden wird auch dieses Gewinnsystem in die Betrachtungen einbezogen, wobei wir uns die Ergebnisse der früheren Ableitungen möglichst zunutze machen wollen. Die Tarifprämie $\pi_{x\overline{n}}$ für das Summenzuwachssystem ergibt sich aus (4), wenn wir die Dividenden Δ_{x+t} durch die Einmalprämien für die Summenerhöhungen K_{x+t} ersetzen. Nach Einführung der diskontierten Zahlen der Lebenden lautet somit die Äquivalenzgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{x\bar{n}}}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} &= \alpha + \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t} q_{x+t} + \frac{D_{x+n}}{D_x} + \\ &+ \frac{(\beta \pi_{x\bar{n}} + \gamma)}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} + \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} K_{x+t} A_{x+t:n-\bar{t}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Der Barwert der Stornogewinne G lässt sich weitgehend nach Formel (10) berechnen. Einzig die letzte Summe in (10) nimmt ein verändertes Aussehen an. Dort tritt nämlich wiederum an Stelle von A_{x+t} die Einmalprämie (diesmal jedoch unter Berücksichtigung des Stornos als Abgangsursache) für den Summenzuwachs K_{x+t} , d.h. statt A_{x+t} steht in (10)

$$\begin{aligned} K_{x+t} A_{x+t:n-\bar{t}}^s &= \frac{K_{x+t}}{D_{x+t}^d} \left\{ \sum_{i=t}^{n-1} v D_{x+i}^d * q_{x+i} + \right. \\ &\left. + D_{x+n}^d + \sum_{i=t}^{n-1} v D_{x+i}^d * s_{x+i} \cdot i - t + 1 U_{x+t:n-\bar{t}}^b \right\}; \end{aligned}$$

$i - t + 1 U_{x+t:n-\bar{t}}^b$ bezeichnet die im Stornofall zu leistende Abgangsschädigung für den im Zeitpunkt t gewährten Bonus «1».

Für den Barwert der Stornogewinne G gilt somit die Beziehung

$$\begin{aligned} G &= - \left\{ 1 + \alpha - \frac{(1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} + d - \gamma}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d - \right. \\ &\left. - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d * s_{x+t} (1 - t + 1 U_{x\bar{n}}) + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} A_{x+t:n-\bar{t}}^s \right\}; \end{aligned} \quad (31)$$

$t + 1 U_{x\bar{n}}$ hat in (31) die gleiche Bedeutung wie in (10), d.h. es ist der Abfindungswert für die vertragliche Versicherungsleistung. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} A_{x+t:n-\bar{t}}^s &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} K_{x+t} \left\{ \sum_{i=t}^{n-1} v D_{x+i}^d * q_{x+i} + \right. \\ &\left. + D_{x+n}^d + \sum_{i=t}^{n-1} v D_{x+i}^d * s_{x+i} \cdot i - t + 1 U_{x+t:n-\bar{t}}^b \right\} \end{aligned}$$

kann noch auf eine praktisch geeignetere Form gebracht werden, welche die Berechnung der diskontierten Zahlen der Gestorbenen $\nu D_{x+i}^d * q_{x+i}$ zu umgehen erlaubt. Wir fügen in der Klammer auf der rechten Seite die Differenz $\sum_{i=t}^{n-1} \nu D_{x+i}^d * s_{x+i} - \sum_{i=t}^{n-1} \nu D_{x+i}^d * s_{x+i} = 0$ hinzu und fassen danach die Glieder so zusammen, dass wir von Relation (8) sinngemäss Gebrauch machen können. Es wird dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} A_{x+t:n-t}^s &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} K_{x+t} D_{x+t}^d - \\ &- \frac{d}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} K_{x+t} \sum_{i=t}^{n-1} D_{x+i}^d - \\ &- \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} K_{x+t} \sum_{i=t}^{n-1} \nu D_{x+i}^d * s_{x+i} (1 - i - t + 1 U_{x+t:n-t}^b) \end{aligned}$$

oder, wenn wir in den Doppelsummen die Reihenfolge der Summationen umkehren und danach aus rein formalen Gründen noch die Indizes t und i miteinander vertauschen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} A_{x+t:n-t}^s &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} - \\ &- \frac{d}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \sum_{i=0}^t K_{x+i} - \\ &- \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} \nu D_{x+t}^d * s_{x+t} \sum_{i=0}^t K_{x+i} (1 - t - i + 1 U_{x+i:n-i}^b). \end{aligned} \quad (32)$$

Gehen wir mit (32) in (31) ein, dann erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} G = & - \left\{ 1 + \alpha - \frac{(1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} + d - \gamma}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d - \right. \\ & - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} \nu D_{x+t}^d * s_{x+t} (1 - t + 1 U_{x \overline{n}}) + \\ & + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} - \frac{d}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \sum_{i=0}^t K_{x+i} - \\ & \left. - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} \nu D_{x+t}^d * s_{x+t} \sum_{i=0}^t K_{x+i} (1 - t - i + 1 U_{x+i:n-i}^b) \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Eine zweite, nämlich Formel (22) analoge Bestimmungsgleichung für G gewinnen wir wie folgt: Unter der Annahme, dass während der ganzen Versicherungsdauer keine vorzeitigen Austritte erfolgen, wird G naturgemäss gleich Null, und wir gelangen – da die Abfallsordnung der „Vertragstreuen“ in die gewöhnliche Absterbeordnung übergeht – von (33) zu

$$0 = - \left\{ 1 + a - \frac{(1 - \beta) \pi_{x|\overline{n}|} + d - \gamma}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} K_{x+t} - \frac{d}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} \sum_{i=0}^t K_{x+i} \right\}. \quad (34)$$

(34) ist bloss eine andere Form der Äquivalenzgleichung (30). Subtrahieren wir nun Gleichung (34) von Gleichung (33), dann wird nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder

$$G = \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d \cdot {}^s s_{x+t} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^t K_{x+i} - (t+1) U_{x|\overline{n}|} + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^t K_{x+i} \cdot {}^{t-i+1} U_{x+i|\overline{n-i}|}^b \right\} - \\ - [(1 - \beta) \pi_{x|\overline{n}|} + d - \gamma] \left\{ \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \right\} + \\ + \left\{ \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} K_{x+t} - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} \right\} - \\ - d \left\{ \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} \sum_{i=0}^t K_{x+i} - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \sum_{i=0}^t K_{x+i} \right\}. \quad (35)$$

Im weiteren können wir den nämlichen Weg beschreiten, den wir schon von (13) bis (22) begangen haben. Wir sehen deshalb davon ab, jeden einzelnen Schritt ausführlich darzulegen. Aus (16) folgen für die diskontierten Zahlen der Lebenden unmittelbar die Relationen

$$D_{x+t} = D_{x+t}^d \text{ für } t = 0 \text{ und} \\ D_{x+t} = D_{x+t}^d + D_{x+t} \sum_{k=0}^{t-1} v D_{x+k}^d {}^s s_{x+k} (1 - q_{x+k}) \frac{1}{D_{x+k+1}} \text{ für } t > 0.$$

Stellen wir in (35) D_{x+t} mittels dieser Formeln dar, führen wir alsdann nach einigen, in ihrer Art uns nicht mehr fremden Umformungen das prospektive vollständige Deckungskapital ${}_{t+1}V_{x:\overline{n}}^v$ (ohne Einbezug des Stornos als Abgangsursache) ein, nämlich

$$\begin{aligned} {}_{t+1}V_{x:\overline{n}}^v &= 1 + \sum_{i=0}^t K_{x+i} - \frac{(1-\beta)\pi_{x:\overline{n}} + d - \gamma}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} + \\ &+ \frac{1}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} K_{x+k} - \frac{d}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} \sum_{i=0}^k K_{x+i} \\ \text{für } t < n-1, {}_{t+1}V_{x:\overline{n}}^v &= 1 + \sum_{i=0}^t K_{x+i} \quad \text{für } t = n-1, \end{aligned}$$

und berücksichtigen wir endlich noch (21), dann finden wir für den Barwert der Stornogewinne die Beziehung

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} ({}_{t+1}V_{x:\overline{n}}^v - {}_{t+1}U_{x:\overline{n}}^g) + \\ &+ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d (q_{x+t} - {}^*q_{x+t}) \left(1 + \sum_{i=0}^t K_{x+i} - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}}^v \right); \end{aligned} \quad (36)$$

${}_{t+1}U_{x:\overline{n}}^g$, die gesamte Abgangsvergütung, setzt sich zusammen aus ${}_{t+1}U_{x:\overline{n}}$, dem Abfindungswert für die vertragliche Versicherungssumme, und $\sum_{i=0}^t K_{x+i} \cdot {}_{t-i+1}U_{x+i:\overline{n-i}}^b$, der Summe der Abgangsvergütungen für die bisher gewährten Bonusse.

Das zweite Glied in (36) erfasst, wie schon in (22), den Barwert der Gewinne auf der Risikoprämie.

Die Stornogewinne mögen wiederum den Versicherten zugute kommen, indem damit a) die Prämien herabgesetzt oder b) die Bonusse erhöht werden.

a) Die mögliche Prämienermässigung lässt sich durch sinngemässe Anwendung von Formel (23) bestimmen.

b) Der Barwert der Belastung durch die Gewährung der zusätzlichen Summenerhöhungen $(K_{x+t}^s - K_{x+t})$ ist gleichzusetzen dem Barwert der Stornogewinne. Das Entwicklungsgesetz der neuen Grösse K_{x+t}^s sei durch

$$K_{x+t}^s = (1 + p) K_{x+t}$$

festgelegt. p , die prozentuale Erhöhung der Bonusse K_{x+t} , berechnet sich dann aus

$$G = \frac{p}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} A_{x+t:n-\bar{t}}^s$$

oder, unter Beachtung von (32),

$$G = p \left\{ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} - \frac{d}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \sum_{i=0}^t K_{x+i} - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^s s_{x+t} \sum_{i=0}^t K_{x+i} (1 - {}_{t-i+1}U_{x+i:n-i}^b) \right\}. \quad (37)$$

*

In den praktischen Beispielen in Abschnitt IV sind die Formeln (33), (23) und (37) zur Anwendung gekommen unter folgenden speziellen Annahmen:

1. *Gewinnplan III* sieht vom 3. Versicherungsjahre an eine jährliche Erhöhung der anwartschaftlichen Versicherungsleistung um den konstanten Betrag K vor. Dadurch entstehen in (33) und (37) die Vereinfachungen

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} = \frac{K}{D_x^d} \sum_{t=2}^{n-1} D_{x+t}^d \quad (38)$$

und

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d \sum_{i=0}^t K_{x+i} = \frac{K}{D_x^d} \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{i=t}^{n-1} D_{x+t}^d. \quad (39)$$

2. Der Rückkaufswert der vertraglichen Versicherungsleistung bemesse sich nach den gleichen Grundsätzen wie bei den Beispielen mit

den Gewinnplänen I und II. Der Abfindungswert für den im $(i + 1)$. Versicherungsjahr gewährten Summenzuwachs «1» entspreche in der Höhe der zugehörigen, mit Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung ermittelten Nettoreserve, d. h. es sei

$${}_{t-i+1}U_{x+i:\overline{n-i}|}^b = A'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} = 1 - d'\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|};$$

damit wird in (33) und (37)

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} {}^vD_{x+t}^d {}^*s_{x+t} \sum_{i=0}^t K_{x+i} (1 - {}_{t-i+1}U_{x+i:\overline{n-i}|}^b) = \\ = \frac{d'K}{D_x^d} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{t=i}^{n-1} {}^vD_{x+t}^d {}^*s_{x+t} \ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}. \end{aligned} \quad (40)$$

§ 2

Die Versicherung auf bestimmte Verfallzeit

Die Versicherung auf bestimmte Verfallzeit lässt sich formal als gemischte Versicherung darstellen mit der variablen Todesfallsumme « v^{n-t-1} » (im $t + 1$. Versicherungsjahr) und der Erlebensfalleistung «1». Bei der Ermittlung des Barwertes der laufenden Kosten ist lediglich zu beachten, dass diese nach dem Tode des Versicherten nicht wegfallen, sondern die Gesellschaft bis zur tatsächlichen Auszahlung der Versicherungsleistung in $t = n$ weiterhin belasten¹⁾. In Formel (41) tragen wir diesem Umstand in folgender Weise Rechnung. Es wird vorerst angenommen, jede neue Police verursache ausnahmslos während den folgenden n Jahren Verwaltungsspesen; daran anschliessend wird jedoch sogleich berücksichtigt, dass Versicherungen, die storniert werden, künftighin der Gesellschaft keine Unkosten mehr bereiten. Verwenden wir die gleichen Bezeichnungen wie in § 1, dann erhalten wir für den Barwert der Anwartschaft auf die gesamten versicherten Leistungen (unter Einschluss der Abfindungswerte) den Ausdruck

¹⁾ Von Diskontierungen wird abgesehen.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{D_x^d} \left\{ \alpha D_x^d + \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^* q_{x+t} v^{n-t-1} + D_{x+n}^d + \right. \\
& + \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^* s_{x+t+1} U_{x\overline{n}} + \beta \pi_{x\overline{n}} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d + \gamma \left(D_x^d \ddot{a}_{\overline{n}} - \right. \\
& \left. - \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^* s_{x+t} \ddot{a}_{\overline{n-t-1}} \right) + \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d A_{x+t} \left. \right\}; \quad (41)
\end{aligned}$$

dem steht der Barwert der Prämienzahlungen gegenüber

$$\frac{\pi_{x\overline{n}}}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d; \quad (42)$$

$\pi_{x\overline{n}}$ ist dabei gegeben durch

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi_{x\overline{n}}}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} = \alpha + v^n + \frac{\beta \pi_{x\overline{n}}}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n}} + \\
& + \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} A_{x+t}. \quad (43)
\end{aligned}$$

Die Differenz (42) – (41) liefert den Barwert der Stornogewinne G . Nach geeigneten Umformungen, die denjenigen in § 1 weitgehend analog sind, so dass wir sie übergehen dürfen, resultieren die folgenden Beziehungen für G

$$\begin{aligned}
G = & - \left\{ \alpha + v^n + \gamma \ddot{a}_{\overline{n}} - \frac{(1-\beta) \pi_{x\overline{n}}}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d - \right. \\
& - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^* s_{x+t} (v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}} - {}_{t+1}U_{x\overline{n}}) + \\
& \left. + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d A_{x+t} \right\} \quad (44)
\end{aligned}$$

und

$$G = \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*j_{x+t} ({}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v - {}_{t+1}U_{x\overline{n}}) + \quad (45)$$

$$+ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d (q_{x+t} - {}^*j_{x+t}) (v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v),$$

wobei das vollständige Deckungskapital ${}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v$ sich aus

$${}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v = v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - \frac{(1-\beta) \pi_{x\overline{n}}}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} +$$

$$+ \frac{1}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} A_{x+k} \quad \text{für } t < n-1$$

$$\text{und } {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v = 1 \quad \text{für } t = n-1$$

ergibt. Das zweite Glied in (45) ist wiederum ein Ausdruck für den Barwert der Gewinne auf der Risikoprämie; $(v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v)$ ist als Risikosumme aufzufassen, d.h. neben der „Todesfallsumme v^{n-t-1} “ ist auch $\gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|}$, die Reserve zur Deckung der zukünftigen Verwaltungskosten, als Versicherungsleistung zu betrachten.

Der Einfluss der Stornogewinne auf die Höhe der Prämien bzw. Dividenden berechnet sich schliesslich aus Gleichungen, die in ihrem Bau vollkommen mit (23) und (24) von § 1 übereinstimmen.

*

In den numerischen Beispielen in Abschnitt IV wird von den Formeln (44), (23) und (24) Gebrauch gemacht. Diese Formeln sind jedoch vorerst noch den speziellen Annahmen über den Verlauf der Gewinnanteile und der Rückkaufswerte anzupassen. Da wir die nämlichen Gewinnpläne (I und II) wie bei der gemischten Versicherung einführen und auch die Abfindungswerte nach denselben Richtlinien wie in § 1 festgelegt werden, ist dabei in gleicher Weise wie im vorigen

Paragraphen vorzugehen; die für die Höhe der Abgangsentschädigungen massgebenden Deckungskapitalien ermitteln sich diesmal aus

$${}_{t+1}V'_{x\overline{n}} = v'^{n-t-1} - \frac{v'^n}{\ddot{a}'_{x\overline{n}}} \ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}} \text{ (Nettoreserve) und}$$

$${}_{t+1}V'_{x\overline{n}}(\bar{\alpha}) = v'^{n-t-1} - \frac{v'^n + \bar{\alpha}}{\ddot{a}'_{x\overline{n}}} \ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}} \text{ (Zillmerreserve).}$$

*

Ist eine Gewinnbeteiligung in Form eines Summenzuwachses vorgesehen, dann steht in (44) in der letzten Summe an Stelle von Δ_{x+t} die Einmalprämie für den Bonus K_{x+t} :

$$K_{x+t} A^s_{x+t:\overline{n-t}} = \frac{K_{x+t}}{D^d_{x+t}} \left\{ \sum_{k=t}^{n-1} v D^d_{x+k} {}^*q_{x+k} v^{n-k-1} + D^d_{x+n} + \sum_{k=t}^{n-1} v D^d_{x+k} {}^*s_{x+k} {}_{k-t+1}U^b_{x+t:\overline{n-t}} \right\},$$

wo ${}_{k-t+1}U^b_{x+t:\overline{n-t}}$ wiederum die Abgangsentschädigung für den Bonus «1» bedeutet. Die grundsätzlich gleichen Überlegungen wie bei der gemischten Versicherung führen zu folgenden Darstellungen für den Barwert der Stornogewinne

$$G = - \left\{ \alpha + v^n + \gamma \ddot{a}_{\overline{n}} - \frac{(1-\beta)\pi_{x\overline{n}}}{D^d_x} \sum_{t=0}^{n-1} D^d_{x+t} - \frac{1}{D^d_x} \sum_{t=0}^{n-1} v D^d_{x+t} {}^*s_{x+t} (v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}} - {}_{t+1}U_{x\overline{n}}) + \right. \\ \left. + \frac{v^n}{I^d_x} \sum_{t=0}^{n-1} I^d_{x+t} K_{x+t} - \frac{1}{D^d_x} \sum_{t=0}^{n-1} v D^d_{x+t} {}^*s_{x+t} \sum_{k=0}^t K_{x+k} (v^{n-t-1} - {}_{t-k+1}U^b_{x+k:\overline{n-k}}) \right\} \quad (46)$$

und

$$\begin{aligned}
G = & \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t|t+1} V_{x\bar{n}|}^v - {}_{t+1}U_{x\bar{n}|}^g + \\
& + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d (q_{x+t} - {}^*q_{x+t}) \left\{ v^{n-t-1} \left(1 + \sum_{k=0}^t K_{x+k} \right) + \right. \\
& \left. + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}V_{x\bar{n}|}^v \right\}; \quad (47)
\end{aligned}$$

$\pi_{x\bar{n}|}$ ist dabei bestimmt durch

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_{x\bar{n}|}}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} = & \alpha + v^n + \frac{\beta \pi_{x\bar{n}|}}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} + \gamma \ddot{a}_{\bar{n}|} + \\
& + \frac{v^n}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} K_{x+t}; \quad (48)
\end{aligned}$$

${}_{t+1}V_{x\bar{n}|}^v$ ist gegeben mit

$$\begin{aligned}
{}_{t+1}V_{x\bar{n}|}^v = & v^{n-t-1} \left(1 + \sum_{k=0}^t K_{x+k} \right) + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - \\
- & \frac{(1-\beta) \pi_{x\bar{n}|}}{D_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} D_{x+k} + \frac{v^{n-t-1}}{l_{x+t+1}} \sum_{k=t+1}^{n-1} l_{x+k} K_{x+k} \quad \text{für } t < n-1,
\end{aligned}$$

$${}_{t+1}V_{x\bar{n}|}^v = 1 + \sum_{k=0}^t K_{x+k} \quad \text{für } t = n-1;$$

${}_{+1}U_{x\bar{n}|}^g$ bezeichnet die gesamte Abgangvergütung

$${}_{t+1}U_{x\bar{n}|} = \sum_{k=0}^t K_{x+k} {}_{t-k+1}U_{x+k;\overline{n-k}|}^b.$$

Die Bestimmungsgleichung für die Stornogewinnprämie lautet wie Formel (23);

die infolge der Stornogewinne mögliche, prozentuale Erhöhung p der Bonusse K_{x+t} erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
G &= \frac{p}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d K_{x+t} A_{x+t:\overline{n-t}|}^s = \\
&= p \left\{ \frac{v^n}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}^d K_{x+t} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} \sum_{k=0}^t K_{x+k} (v^{n-t-1} - {}_{t-k+1}U_{x+k:\overline{n-k}|}^b) \right\}. \quad (49)
\end{aligned}$$

§ 3

Die gemischte Versicherung auf das erste Leben bei zwei verbundenen Leben

Bei der gemischten Versicherung auf das erste Leben kommt die Versicherungssumme «1» beim ersten während der Vertragsdauer von n Jahren eintretenden Todesfall (rechnungsmässig Ende Versicherungsjahr) – also bei Auflösung der Verbindung infolge Todes einer der beiden Versicherten – zur Auszahlung; das versicherte Kapital wird spätestens fällig nach Ablauf der Vertragsdauer. Diese Versicherungsform entspricht formal vollständig der gemischten Versicherung auf ein Leben. Sämtliche Ableitungen und Resultate von § 1 können übernommen werden; wir haben einzig die Ausscheidewahrscheinlichkeiten für eine Person in die entsprechenden Ausscheidewahrscheinlichkeiten für die Verbindung zweier Personen, die gewöhnliche Absterbeordnung in die „Überlebensordnung der Verbindungen“ und die Dekremententafel in die „Abfallsordnung der vertrags-treuen Verbindungen“ übergehen zu lassen:

$q_{x+t} \rightarrow q_{x+t:y+t} = 1 - p_{x+t:y+t}:$
 unabhängige einjährige „Sterbewahrscheinlichkeit der Verbindung“, d. h. Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindung innert Jahresfrist infolge Todes einer der beiden Personen aufgelöst wird;

$s_{x+t} \rightarrow s_{x+t:y+t}:$
 unabhängige einjährige Stornowahrscheinlichkeit, d. h. Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungs-

vertrag im folgenden Jahr vorzeitig aufgehoben wird;

$$*q_{x+t} \rightarrow *q_{x+t:y+t} \sim q_{x+t:y+t} \left(1 - \frac{s_{x+t:y+t}}{2}\right);$$

abhängige einjährige „Sterbewahrscheinlichkeit der Verbindung“, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindung im $(t+1)$. Versicherungsjahre infolge Todes einer der beiden Personen aus dem Versichertenbestand ausscheidet;

$$*s_{x+t} \rightarrow *s_{x+t:y+t} \sim s_{x+t:y+t} \left(1 - \frac{q_{x+t:y+t}}{2}\right);$$

abhängige einjährige Stornowahrscheinlichkeit;

$$l_{x+t} \rightarrow l_{x+t:y+t};$$

„Überlebensordnung der Verbindungen“, mit

$$\begin{aligned} l_{x+t:y+t} &= l_{xy} \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - q_{x+\tau:y+\tau}) = \\ &= l_{xy} \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - q_{x+\tau}) (1 - q_{y+\tau}), \\ D_{x+t:y+t} &= v^{\frac{1}{2}(x+y)+t} l_{x+t:y+t}; \end{aligned}$$

$$l_{x+t}^d \rightarrow l_{x+t:y+t}^d;$$

„Abfallsordnung der vertragstreuen Verbindungen“, mit

$$\begin{aligned} l_{x+t:y+t}^d &= l_{xy}^d \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - q_{x+\tau:y+\tau}) (1 - s_{x+\tau:y+\tau}) = \\ &= l_{x+t:y+t} \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - s_{x+\tau:y+\tau}) \end{aligned}$$

– da $l_{xy}^d = l_{xy}$ gesetzt wird – oder

$$\begin{aligned} l_{x+t:y+t}^d &= l_{xy}^d \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - *q_{x+\tau:y+\tau} - *s_{x+\tau:y+\tau}), \\ D_{x+t:y+t}^d &= v^{\frac{1}{2}(x+y)+t} l_{x+t:y+t}^d; \end{aligned}$$

(50)

des weiteren sind auch bei allen übrigen vom Alter abhängigen Versicherungswerten, wie

$$\pi_{x|\bar{n}}(\pi_{x|\bar{n}}^s), {}_{t+1}V_{x|\bar{n}}^v, {}_{t+1}U_{x|\bar{n}}, \Delta_{x+t}(\Delta_{x+t}^s), K_{x+t}(K_{x+t}^s)$$

usw., die Altersindizes x bzw. $x+t$ durch xy bzw. $x+t:y+t$ zu ersetzen.

*

Bei den numerischen Beispielen in Abschnitt IV sollen die nämlichen Gewinnpläne (Systeme I und II) wie bei der gemischten Versicherung Verwendung finden; unter dieser Annahme gelten die Formeln von § 1, welche auf diese speziellen Dividendenpläne Rücksicht nehmen, bei sinngemässer Umdeutung auch für die gemischte Versicherung auf das erste Leben. Ferner seien in IV für die Bestimmung der Abfindungswerte ${}_{t+1}U_{xy|\bar{n}}$ die durchaus gleichen Grundsätze wie bei der gemischten Versicherung massgebend, wobei die Netto- und Zillmerreserven diesmal jedoch nur näherungsweise ermittelt werden, und zwar mit

$$\left. \begin{aligned} {}_{t+1}V'_{xy|\bar{n}} &\sim {}_{t+1}V'_{x|\bar{n}} + {}_{t+1}V'_{y|\bar{n}} - {}_{t+1}V'_{\bar{n}} \quad {}^1) \quad \text{und} \\ {}_{t+1}V'_{xy|\bar{n}}(\bar{a}) &= (1 + \bar{a}) {}_{t+1}V'_{xy|\bar{n}} - \bar{a} \sim \\ &\sim {}_{t+1}V'_{x|\bar{n}}(\bar{a}) + {}_{t+1}V'_{y|\bar{n}}(\bar{a}) - {}_{t+1}V'_{\bar{n}}(\bar{a}). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

¹⁾ Vgl. H. Jecklin: Näherungswerte für die gemischte Versicherung mehrerer verbundener Leben. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 46. Band, Heft 1, 1946.

III. Abschnitt

Ein Näherungsverfahren zur Bestimmung des Einflusses des Stornos auf die Tarifprämien und Gewinnanteile

Mit den im vorigen Abschnitt hergeleiteten Formeln können der Barwert der Stornogewinne sowie der Einfluss des Stornos auf Tarifprämie und Gewinnanteil genau ermittelt werden – immer unter der zwangsläufigen Annahme, dass die Rechnungsvoraussetzungen mit dem tatsächlichen Verlauf der Ereignisse übereinstimmen. Im Vergleich mit den üblichen Tarif- und Reserveberechnungen treten allerdings Versicherungsgrößen auf, deren Werte in der Regel nicht tabelliert vorliegen, sondern vorerst von Grund aus zu berechnen sind. Darunter gehören u. a. die Tafel der diskontierten Zahlen der „Vertragstreuen“ als auch die Summen dieser Zahlen; die diskontierten Zahlen der „vorzeitig Ausgeschiedenen“, ihre Produkte mit den Abfindungswerten und die Summen dieser Produkte. Wie schon in Abschnitt I hervorgehoben wurde, können die Stornohäufigkeiten in der Zeit unregelmässig, ja sogar sprunghaft verlaufen. Es scheint daher gewagt – selbst wenn umfangreiche statistische Grundlagen vorhanden sind –, die Auswirkungen des anomalen Abgangs auf Prämie und Gewinnausschüttung nur auf Grund einer einzigen Annahme über den Stornoverlauf abzuschätzen. Vielmehr gebietet die Unbeständigkeit der Stornoverhältnisse, die Rechnungsgrundlagen über den vorzeitigen Abgang zu variieren und damit dessen Einfluss auf Prämie und Dividende abzugrenzen. Dadurch wird jedoch die Rechenarbeit zur Ermittlung der vom Storno abhängigen Versicherungswerte vervielfacht, und zwar nahezu entsprechend der Anzahl der Variationen des vorzeitigen Abgangs. Das im folgenden zu besprechende Näherungsverfahren erlaubt, die Auswirkungen variierter Stornogrundlagen auf Prämie und Gewinnanteile mit wesentlich kleinerem Rechenaufwand zu bestimmen; allerdings beruht es auf einer besonderen Annahme über den Stornoverlauf in der Versiche-

rungszeit: Wir erinnern uns, dass der anomale Abgang im ersten Versicherungsjahre am grössten ist, sich in den folgenden Versicherungsjahren anfänglich schnell verringert, dann aber für zwei aufeinanderfolgende Jahre allmählich immer schwächere zahlenmässige Unterschiede aufweist. Für alle folgenden Betrachtungen nehmen wir nun an, dass sich die unabhängigen Stornowahrscheinlichkeiten s_{x+t} ($s_{x+t:y+t}$) von $t = 3$ an ziffernmässig überhaupt nicht mehr unterscheiden,

d.h. die unabhängigen Stornowahrscheinlichkeiten seien vom 4. Versicherungsjahre an konstant.

Bei Variation der Stornogrundlagen im Rahmen dieser Voraussetzung lässt sich der Einfluss des Stornos auf die Prämien und Gewinnanteile näherungsweise mit Hilfe einer Methode ermitteln, welche z.T. bereits bei der Lösung anderer Variationsprobleme der Versicherungsmathematik entwickelt wurde¹⁾.

§ 1

Die gemischte Versicherung

Zur näherungsweisen Berechnung des Barwertes der Stornogewinne gehen wir von Gleichung (10) aus. Wir zerlegen in ihr sämtliche Summen derart in je zwei Teilsummen, dass sie die folgende Gestalt annimmt

$$G = \left. \begin{aligned} & \frac{c}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 D_{x+t}^d - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 D_{x+t}^d \Delta_{x+t} + \\ & + \frac{c_1}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 v D_{x+t}^d s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x|\bar{n}}) - 1 - a + \\ & + \frac{c}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d - \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} + \\ & + \frac{c_2}{D_x^d} s \sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d (1 - {}_{t+1}U_{x|\bar{n}}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (A) \\ (B) \end{array} \quad (52)$$

¹⁾ Vgl. die Arbeiten (18), (20) und (21).

– der Einfachheit halber ist $(1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} + d - \gamma$ mit c bezeichnet worden, s bedeutet die für $t \geq 3$ konstante unabhängige Stornowahrscheinlichkeit¹⁾, ferner sind

$$c_1 = \frac{\sum_{t=0}^2 v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}})}{\sum_{t=0}^2 v D_{x+t}^d s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}})}, \quad c_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}})}{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d s_{x+t} (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}})}.$$

Da ${}^*s_{x+t} = s_{x+t} \left(1 - \frac{q_{x+t}}{2}\right)$ ist, stellen c_1 und c_2 gewichtete arithmetische Mittel von $\left(1 - \frac{q_{x+t}}{2}\right)$ dar. Bei geeigneter Wahl zweier „mittlerer Alter“ μ_1 und μ_2 können daher die Näherungen

$$c_1 \sim \left(1 - \frac{q_{\mu_1}}{2}\right) \text{ und } c_2 \sim \left(1 - \frac{q_{\mu_2}}{2}\right) \quad (53)$$

eingeführt werden. Damit erreichen wir, dass in Formel (52) die Berechnung der abhängigen Stornowahrscheinlichkeiten umgangen werden kann. Numerische Versuche mit den in Abschnitt IV verwendeten Rechnungsgrundlagen haben ergeben, dass c_1 und c_2 mit ausreichender Genauigkeit approximiert werden, wenn wir

$$\mu_1 = x \text{ und } \mu_2 = x + 3 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor \quad (53a)$$

wählen. $\left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$ ist das bekannte Symbol für die grösste in $\frac{n-3}{3}$ enthaltene ganze Zahl.

Im folgenden betrachten wir die beiden Teile (A) und (B) von Gleichung (52) gesondert.

In (A) wird einzig c_1 approximativ bestimmt; im übrigen soll der

¹⁾ Obwohl wir durch keinen besonderen Index ausdrücklich darauf hinweisen, kann die für $t \geq 3$ konstante unabhängige Stornowahrscheinlichkeit s immer noch vom Beitrittsalter x abhängen.

Wert von (A) genau ermittelt werden. Bei jeder Änderung der Stornoannahmen muss (A) von Grund aus neu berechnet werden – nur die vom Storno unabhängigen Rechengrößen sind ein für allemal bestimmbar. Der Rechenaufwand ist jedoch nicht erheblich, denn die in (A) enthaltenen Summen umfassen nur wenige Glieder.

In (B) werden die Summationen nur näherungsweise ausgeführt. Die Näherungen lassen sich leicht herleiten, wenn wir die einzelnen Summen zuvor in geeigneter Weise umformen:

Wir gehen von dem allgemeinen Ausdruck

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d f_{x+t}$$

aus und ersetzen später f_{x+t} durch die Größen 1 bzw. Δ_{x+t} bzw. $v(1 - {}_{t+1}U_{x|\overline{n}})$. Unter Benutzung von Relation (3), d.h. mit $l_x^d = l_x$, finden wir

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d f_{x+t} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t} f_{x+t} \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - s_{x+\tau});$$

da für $\tau \geq 3$ $s_{x+\tau} = s$ konstant ist, wird, wenn wir $\prod_{\tau=0}^2 (1 - s_{x+\tau})$ mit P bezeichnen und t in $(t+3)$ übergehen lassen,

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d f_{x+t} = \frac{P}{D_x} \sum_{t=0}^{n-4} D_{x+3+t} f_{x+3+t} (1 - s)^t$$

oder, wenn wir $(1 - s)^t$ in die Binomialreihe entwickeln und alsdann die Reihenfolge der Summationen umkehren,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d f_{x+t} &= \frac{P}{D_x} \sum_{t=0}^{n-4} D_{x+3+t} f_{x+3+t} \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} s^k = \\ &= P \sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k s^k \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t} f_{x+3+t} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d f_{x+t} = P \sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k H_k s^k, \quad (54)$$

mit
$$H_k = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t} f_{x+3+t}. \quad (54a)$$

Führen wir in (54) an Stelle von f_{x+t} nacheinander die Werte 1 , Δ_{x+} und $v(1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}})$ ein, dann können die verschiedenen Summen in (B) mittels (54) als Polynome in s dargestellt werden; zur Bestimmung der vom Storno unabhängigen Koeffizienten H_k ist in (54a) sinn- gemäss statt f_{x+3+t} nacheinander 1 , Δ_{x+3+t} und $v(1 - {}_{t+4}U_{x\bar{n}})$ zu setzen.

Wir erhalten somit

$$\frac{c}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d = c P \sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k H'_k s^k, \quad (55)$$

mit
$$H'_k = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t}; \quad (55a)$$

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} = P \sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k H''_k s^k, \quad (56)$$

mit
$$H''_k = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t} \Delta_{x+3+t}; \quad (56a)$$

$$\frac{c_2}{D_x^d} s \sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}}) = c_2 P \sum_{k=0}^{n-4} (-1)^k H'''_k s^{k+1}, \quad (57)$$

mit
$$H'''_k = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t} v (1 - {}_{t+4}U_{x\bar{n}}). \quad (57a)$$

Wegen der Vielzahl der zu bestimmenden Koeffizienten H_k kommt diesen Formeln zwar keine direkte praktische Bedeutung zu; es ist je-

doch möglich – da s nur verhältnismässig kleine Werte annimmt –, die obenstehenden Ausdrücke in folgender Weise zu approximieren:

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d &= \epsilon P \{ H'_0 - H'_1 s + H'_2 s^2 - H'_3 s^3 + \dots + \\
 &\quad + (-1)^{n-4} H'_{n-4} s^{n-4} \} = \\
 &= \epsilon P \left\{ H'_0 - H'_1 s \left[1 - \frac{H'_2}{H'_1} s + \frac{H'_3}{H'_1} s^2 - \dots + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^{n-5} \frac{H'_{n-4}}{H'_1} s^{n-5} \right] \right\} \sim \\
 &\sim \epsilon P \left\{ H'_0 - H'_1 s \left[1 - \frac{H'_2}{H'_1} s + \left(\frac{H'_2}{H'_1} s \right)^2 - \dots + \dots \right] \right\} = \\
 &= \epsilon P \left\{ H'_0 - \frac{H'_1 s}{1 + \frac{H'_2}{H'_1} s} \right\}; \tag{58}
 \end{aligned}$$

ganz entsprechend ergibt sich

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} \sim P \left\{ H''_0 - \frac{H''_1 s}{1 + \frac{H''_2}{H''_1} s} \right\}; \tag{59}$$

und schliesslich gilt auch

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon_2}{D_x^d} s \sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d (1 - {}_{t+1}U_{x\bar{n}}) &= \\
 &= \epsilon_2 P \{ H'''_0 s - H'''_1 s^2 + H'''_2 s^3 - \dots + (-1)^{n-4} H'''_{n-4} s^{n-3} \} = \\
 &= \epsilon_2 P H'''_0 s \left\{ 1 - \frac{H'''_1}{H'''_0} s + \frac{H'''_2}{H'''_0} s^2 - \dots + (-1)^{n-4} \frac{H'''_{n-4}}{H'''_0} s^{n-4} \right\} \sim \\
 &\sim \epsilon_2 P H'''_0 s \left\{ 1 - \frac{H'''_1}{H'''_0} s + \left(\frac{H'''_1}{H'''_0} s \right)^2 - \dots + \dots \right\} = \\
 &= \epsilon_2 P \frac{H'''_0 s}{1 + \frac{H'''_1}{H'''_0} s}. \tag{60}
 \end{aligned}$$

Die ganzen rationalen Funktionen von s werden demnach durch gebrochene lineare Funktionen angenähert (*Näherung 1 = N 1*). Die Fehler, welche durch die Einführung dieser Näherungsfunktionen begangen werden, betragen

$$\left. \begin{aligned} \text{in (58): } & \epsilon P s^3 \left\{ H'_3 - \frac{H_2'^2}{H_1'} \right\} - \dots, \\ \text{in (59): } & P s^3 \left\{ H''_3 - \frac{H_2''^2}{H_1''} \right\} - \dots, \\ \text{in (60): } & -\epsilon_2 P s^3 \left\{ H_2''' - \frac{H_1'''^2}{H_0'''} \right\} + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

sie sind somit von der 3. Ordnung in s und dürften daher nur unbedeutend sein. Damit ist allerdings die Brauchbarkeit dieser Näherungen zur Bestimmung des Barwertes der Stornogewinne noch nicht erwiesen; denn die Fehler der Näherungswerte gehen auch in die Bestimmungsgleichung für G , (52), ein und können dort – trotz ihrer Kleinheit – ein relativ grosses Gewicht erlangen, da der Wert für G erfahrungsgemäss recht niedrig sein kann. Letztlich vermögen daher nur numerische Untersuchungen über die praktische Verwendbarkeit des oben dargelegten Näherungsverfahrens Aufschluss zu geben. Immerhin ist zu erwarten, dass sich in (52) die Fehler der verschiedenen Approximationen wenigstens teilweise ausgleichen. Der Bau der Glieder 3. Ordnung in (61), die bei kleinen Werten von s für die Grösse der Fehler massgebend sind, berechtigt nämlich wohl zu der Annahme, dass der Fehler der Näherung (60) ein anderes Vorzeichen als die Fehler der Näherungen (58) und (59) besitzt; demzufolge würde dann in (52) der Fehler von (58) mindestens z. T. durch die Fehler von (59) und (60) aufgewogen werden.

Sollten genauere Resultate erforderlich sein, als sie Näherung 1 zu vermitteln vermag, dann ist als Approximationsfunktion die gebrochene rationale Funktion 2. Grades einzuführen (*Näherung 2 = N 2*):

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d &= \\ = \epsilon P \{ H'_0 - H'_1 s + H'_2 s^2 - H'_3 s^3 + \dots + (-1)^{n-4} H'_{n-4} s^{n-4} \} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^c P \left\{ H'_0 - H'_1 s + H'_2 s^2 \left[1 - \frac{H'_3}{H'_2} s + \dots + (-1)^{n-6} \frac{H'_{n-4}}{H'_2} s^{n-6} \right] \right\} \sim \\
&\sim {}^c P \left\{ H'_0 - H'_1 s + H'_2 s^2 \left[1 - \frac{H'_3}{H'_2} s + \left(\frac{H'_3}{H'_2} s \right)^2 - \dots + \dots \right] \right\} = \\
&= {}^c P \left\{ H'_0 - H'_1 s + \frac{H'_2 s^2}{1 + \frac{H'_3}{H'_2} s} \right\}; \tag{62}
\end{aligned}$$

auf analoge Weise gewinnen wir

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d A_{x+t} \sim P \left\{ H''_0 - H''_1 s + \frac{H''_2 s^2}{1 + \frac{H''_3}{H''_2} s} \right\} \tag{63}$$

sowie

$$\frac{\epsilon_2}{D_x^d} s \sum_{t=3}^{n-1} {}^v D_{x+t}^d (1 - {}_{t+1} U_{x||}) \sim \epsilon_2 P \left\{ H'''_0 s - \frac{H'''_1 s^2}{1 + \frac{H'''_2}{H'''_1} s} \right\}. \tag{64}$$

Die Abweichungen dieser Näherungen von den exakten Ausdrücken sind bloss von der 4. Ordnung in s . Die Mehrarbeit, die im Vergleich zu Näherung 1 im wesentlichen durch die Ermittlung einer weiteren Konstanten H_k verursacht wird, dürfte daher durch grössere Genauigkeit der Ergebnisse belohnt werden.

Zur numerischen Berechnung der Parameter H_k kann an Stelle der Definitionsgleichung (54a) eine praktisch geeignetere Formel verwendet werden. Setzen wir

$$\begin{aligned}
F_k^{(0)} &= \sum_{t=k}^{n-4} D_{x+3+t} f_{x+3+t}, \\
F_k^{(1)} &= \sum_{t=k}^{n-4} F_t^{(0)} = \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} D_{x+3+t_1} f_{x+3+t_1}, \\
&\dots\dots\dots \\
F_k^{(v)} &= \sum_{t=k}^{n-4} F_t^{(v-1)} = \dots = \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} \dots \sum_{t_v=t_{v-1}}^{n-4} D_{x+3+t_v} f_{x+3+t_v}, \tag{65}
\end{aligned}$$

dann gilt, wie wir im folgenden zeigen wollen,

$$\sum_{t=k}^{n-4} \binom{i-k+v}{v} D_{x+3+t} f_{x+3+t} = F_k^{(v)}, \quad (66)$$

insbesondere für $v = k$

$$\sum_{t=k}^{n-4} \binom{i}{k} D_{x+3+t} f_{x+3+t} = F_k^{(k)}. \quad (67)$$

§

Wir weisen die Richtigkeit von (66) durch Schluss von v auf $(v+1)$ nach. Angenommen, (66) gelte zu Recht für ein bestimmtes v , dann ist nach Definition

$$F_k^{(v+1)} = \sum_{t=k}^{n-4} F_t^{(v)} = \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{i=t}^{n-4} \binom{i-t+v}{v} D_{x+3+i} f_{x+3+i}$$

oder, wenn wir die Reihenfolge der Summationen umkehren,

$$F_k^{(v+1)} = \sum_{i=k}^{n-4} D_{x+3+i} f_{x+3+i} \sum_{t=k}^i \binom{i-t+v}{v};$$

die innere Summe

$$\binom{i-k+v}{v} + \binom{i-(k+1)+v}{v} + \dots + \binom{v+1}{v} + \binom{v}{v}$$

ist aber bekanntlich gleich $\binom{i-k+(v+1)}{v+1}^1$.

Damit ist gezeigt, dass Beziehung (66) auch für $(v+1)$ zutrifft. Da aber (66) für $v = 0$ und $v = 1$ richtig ist, wie sich noch ohne Schwierigkeit direkt verifizieren lässt, gilt (66) folglich für alle natürlichen v . Wenn wir nun (67) in (54a) einführen, ergeben sich die H_k auf einfache Weise durch „ $(k+1)$ -fache Summation“ der Grössen $D_{x+3+t} f_{x+3+t}$ und nachherige Division durch D_x ; es wird nämlich

¹⁾ Vgl. z.B. von Mangoldt-Knopp: Einführung in die höhere Mathematik, Band 1.

$$H_k = \frac{1}{D_x} F_k^{(k)} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} \cdots \sum_{t_k=t_{k-1}}^{n-4} D_{x+3+t_k} f_{x+3+t_k}, \quad (68)$$

wo f_{x+3+t_k} an Stelle von 1, Δ_{x+3+t_k} oder $v(1 - t_{k+4} U_{x\bar{n}})$ steht. Im besonderen sind also

$$\left. \begin{aligned} H'_k &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} \cdots \sum_{t_k=t_{k-1}}^{n-4} D_{x+3+t_k}, \\ H''_k &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} \cdots \sum_{t_k=t_{k-1}}^{n-4} D_{x+3+t_k} \Delta_{x+3+t_k}, \\ H'''_k &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} \cdots \sum_{t_k=t_{k-1}}^{n-4} D_{x+3+t_k} v(1 - t_{k+4} U_{x\bar{n}}). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Die H'_k können durch die höheren Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden ausgedrückt werden, welche wohl immer z. T. bereits tabelliert sind. Aus (54a) folgt nämlich

$$H'_k = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{\omega-x-3} \binom{t}{k} D_{x+3+t} - \frac{1}{D_x} \sum_{t=n-3}^{\omega-x-3} \binom{t}{k} D_{x+3+t}.$$

Wir schreiben nun für das zweite Glied auf der rechten Seite

$$\frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\omega-x-n} \binom{n-3+t}{k} D_{x+n+t}$$

und beachten, dass

$$\binom{n-3+t}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-4-i}{k-i} \binom{t+i}{i}^1$$

¹⁾ Vgl. z.B. E. Fischer: Das Zinsfußproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 42. Band, Heft 2, 1942, S. 216.

ist; alsdann erhalten wir

$$H'_k = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{\omega-x-3} \binom{t}{k} D_{x+3+t} - \\ - \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\omega-x-n} \sum_{i=0}^k \binom{n-4-i}{k-i} \binom{t+i}{i} D_{x+n+t}$$

oder, wenn wir in der Doppelsumme die Summationsfolge vertauschen und $(t+i)$ in t übergehen lassen,

$$H'_k = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{\omega-x-3} \binom{t}{k} D_{x+3+t} - \\ - \frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^k \binom{n-4-i}{k-i} \sum_{t=i}^{\omega-x-n+i} \binom{t}{i} D_{x+n-i+t}. \quad (70)$$

Setzt man in (67), wobei $F_k^{(k)}$ mittels (65) dargestellt wird, $f_{x+3+t} = 1$ und als obere Summationsgrenze $\omega - x - 3$ statt $n - 4$, dann ergibt sich

$$\sum_{t=k}^{\omega-x-3} \binom{t}{k} D_{x+3+t} = \sum_{t=k}^{\omega-x-3} \sum_{t_1=t}^{\omega-x-3} \cdots \sum_{t_k=t_{k-1}}^{\omega-x-3} D_{x+3+t_k} = S_{x+3+k}^{(k)};$$

entsprechend gilt

$$\sum_{t=i}^{\omega-x-n+i} \binom{t}{i} D_{x+n-i+t} = S_{x+n}^{(i)}.$$

Daher wird (70) schliesslich zu

$$H'_k = \frac{S_{x+3+k}^{(k)}}{D_x} - \frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^k \binom{n-4-i}{k-i} S_{x+n}^{(i)}; \quad (71)$$

im speziellen sind

$$H'_0 = \frac{N_{x+3} - N_{x+n}}{D_x},$$

$$H'_1 = \frac{S_{x+4} - S_{x+n} - (n-4) N_{x+n}}{D_x},$$

$$H'_2 = \frac{S_{x+5}^{(2)} - S_{x+n}^{(2)} - (n-5) S_{x+n} - \binom{n-4}{2} N_{x+n}}{D_x},$$

$$H'_3 = \frac{S_{x+6}^{(3)} - S_{x+n}^{(3)} - (n-6) S_{x+n}^{(2)} - \binom{n-5}{2} S_{x+n} - \binom{n-4}{3} N_{x+n}}{D_x}.$$

Gleichgültig, ob wir Näherung 1 oder Näherung 2 benutzen, bei einer Variation der Stornowahrscheinlichkeiten lässt sich der neue Wert von (52)-(B) mit verhältnismässig wenig Mühe gewinnen, sobald die Parameter H_k der Näherungsfunktionen (ein für allemal) bestimmt sind; die Ausscheideordnung der „Vertragstreuen“, die bei genauer Rechnung bei jeder Stornoänderung neu zu bilden wäre, tritt in den Näherungsformeln nicht mehr auf.

Der Barwert der Stornogewinne G folgt schliesslich durch Zusammenfassung der Werte von (A) und (B) in (52).

*

Das im vorstehenden an Relation (10) dargelegte Verfahren zur weitgehenden Ausschaltung der Dekremententafel aus der Bestimmungsgleichung für G kann grundsätzlich auch in Formel (22) angewendet werden. Die Ermittlung der vollständigen Deckungskapitalien lässt sich allerdings nicht umgehen. In der Praxis lohnt sich dieser Rechenaufwand nicht; numerische Beispiele haben nämlich gezeigt, dass sich aus (22) keine genaueren Näherungen als aus (10) herleiten lassen – vorausgesetzt, dass die als Näherungsfunktionen eingeführten gebrochenen rationalen Funktionen von s in (22) nicht von höherem Grade als in (10) sind. Im Hinblick auf die praktische Anwendung besteht daher keine Veranlassung, die an Gleichung (10) entwickelte Näherungsmethode auf (22) zu übertragen.

*

Nachdem der Barwert der Stornogewinne bestimmt worden ist, ergibt sich der Einfluss der vorzeitigen Vertragsauflösungen auf Tarifprämie und Gewinnanteil mit minimalem Rechenaufwand. Die Stornogewinnprämie erhalten wir nach (23) aus

$$G = (1 - \beta) (\pi_{x\bar{n}} - \pi_{x\bar{n}}^s) \left\{ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 D_{x+t}^d + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \right\}. \quad (72)$$

Der Wert des ersten Gliedes in der Klammer auf der rechten Seite musste schon bei der Berechnung von (52)-(A) ermittelt werden und ist somit bekannt. Die Grösse des zweiten Gliedes tritt als Zwischenergebnis bei der Verwendung der Formeln (58) oder (62) auf; sie ist daher bei der Approximation des Wertes von (52)-(B) bereits näherungsweise bestimmt worden und bedarf also gleichfalls keiner Berechnung mehr.

Die prozentuale Erhöhung p der Dividenden Δ_{x+t} infolge der Stornogewinne ist nach (24) gegeben durch

$$G = p \left\{ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 D_{x+t}^d \Delta_{x+t} + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} \right\}. \quad (73)$$

Der Wert des Klammerausdrucks lässt sich wiederum mühelos finden. Die Grösse des ersten Gliedes kann aus (52)-(A) entnommen werden; diejenige des zweiten Gliedes ergibt sich seinerseits aus (52)-(B), wo sie mit Hilfe von (59) oder (63) approximativ ermittelt worden ist.

*

Richtet sich die Höhe der Dividenden nach den Gewinnplänen I oder II (siehe S. 23), dann wird die Bestimmung von

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 D_{x+t}^d \Delta_{x+t} + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t} \quad (74)$$

in (52) und (73) wesentlich erleichtert:

Bei Gewinnplan I vereinfacht sich (74) zu

$$\frac{(1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} A_1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich nur durch einen konstanten Faktor von (55) und kann daher ebenfalls mit Hilfe von (58) oder (62) approximiert werden, d. h. die Bildung einer speziellen Näherungsfunktion für die zweite Summe in (74) fällt weg.

Bei Gewinnplan II wird (74) zu

$$(1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} A_2 \left\{ \frac{D_{x+2}^d}{D_x^d} + \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d (t-1) \right\}.$$

Die Approximationen für $\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d (t-1)$ leiten sich in nunmehr bekannter Weise ebenfalls aus (54) ab, wobei f_{x+t} diesmal die Bedeutung von $(t-1)$ hat. Sie stimmen äusserlich mit den rechten Seiten der Näherungsformeln (59) bzw. (63) überein; an Stelle der H_k'' treten jedoch die Parameter

$$\bar{H}_k'' = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} (t+2) \binom{t}{k} D_{x+3+t},$$

denn f_{x+3+t} ist in (54a) durch $(t+2)$ zu ersetzen. Da

$$(t+2) \binom{t}{k} = (k+1) \binom{t}{k+1} + (k+2) \binom{t}{k} \quad (75)$$

gilt, lässt sich auch schreiben

$$\bar{H}_k'' = \frac{k+1}{D_x} \sum_{t=k+1}^{n-4} \binom{t}{k+1} D_{x+3+t} + \frac{k+2}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t}$$

oder, unter Berücksichtigung von (55a),

$$\bar{H}_k'' = (k+1) H_{k+1}' + (k+2) H_k'.$$

Die Konstanten $\bar{H}_k''$ sind somit leicht durch die H_k' darstellbar und können unter Beiziehung von Relation (71) direkt aus den Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden berechnet werden.

Bei Einführung der Gewinnpläne I und II ist schliesslich noch zu beachten, dass die Formel für die Stornogewinnprämie (72) bei Gewinnplan I gemäss (26) in

$$G = (1 - \beta) (\pi_{x\bar{n}} - \pi_{x\bar{n}}^s) \left\{ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 D_{x+t}^d + (1 - A_1) \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \right\}, \quad (76)$$

bei Gewinnplan II gemäss (28) in

$$G = (1 - \beta) (\pi_{x\bar{n}} - \pi_{x\bar{n}}^s) \left\{ \left(\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^2 D_{x+t}^d - A_2 \frac{D_{x+2}^d}{D_x^d} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d - A_2 \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d (t-1) \right) \right\} \quad (77)$$

übergeht.

Wenn die Abfindungswerte nach den Grundsätzen von Seite 23f. festgelegt sind, setzen wir in (52)-(B) durchwegs ${}_{t+1}U_{x\bar{n}} = {}_{t+1}V'_{x\bar{n}}(\bar{a})$. – Die Regel, wonach die auszurichtende Abgangsentschädigung mindestens $\frac{2}{3} {}_{t+1}V'_{x\bar{n}}$ betragen soll, ist nötigenfalls formelmässig dadurch zu berücksichtigen, dass wir (52)-(A) um ein „Korrekturglied“ von der Form der dritten Summe in (29) erweitern. Dieses ist wie die übrigen Ausdrücke in (52)-(A) im wesentlichen genau zu berechnen. Lediglich die abhängigen Stornowahrscheinlichkeiten werden wiederum durch die unabhängigen angenähert; wenn wir diese jedoch mit der Konstanten c_1 , Formeln (53) und (53a), multiplizieren, wird der Fehler praktisch eliminiert. – Durch dieses Vorgehen erreichen wir, dass die Parameter H_k''' in jedem Fall unabhängig vom Verhältnis zwischen Netto- und Zillmerreserve sind; die Gleichungen für H_k''' , (57a) und (69), nehmen damit folgende Gestalt an

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_k''' &= \frac{1 + \bar{a}}{\bar{a}'_{x|\bar{n}|}} \frac{v}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t} \bar{a}'_{x+4+t|\bar{n}-4-t|} = \\ &= \frac{1 + \bar{a}}{\bar{a}'_{x|\bar{n}|}} \frac{v}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} \cdots \sum_{t_k=t_{k-1}}^{n-4} D_{x+3+t_k} \bar{a}'_{x+4+t_k|\bar{n}-4-t_k|} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

*

Sieht der Gewinnplan statt einer bar zu vergütenden Dividende A_{x+t} , eine Erhöhung der Versicherungssumme um K_{x+t} vor, dann ist das im vorigen an Formel (10) dargestellte Näherungsverfahren zur Bestimmung des Barwertes der Stornogewinne sinngemäss auf Beziehung (33) zu übertragen. Da sich (33) von (10) äusserlich nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle von $\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}^d A_{x+t}$ der Ausdruck (32) steht,

wäre einzig noch die Approximation für (32) herzuleiten. Es dürfte sich jedoch erübrigen, den uns nunmehr bekannten Gedankengang im einzelnen zu wiederholen. Mit Rücksicht auf die praktischen Beispiele in Abschnitt IV sei das Vorgehen immerhin kurz beschrieben, wobei wir entsprechend den Annahmen auf S. 29 f. voraussetzen, dass $K_{x+t} = 0$ für $t < 2$, $K_{x+t} = K = \text{konstant}$ für $t \geq 2$ und ${}_{t-i+1}U_{x+i|\bar{n}-i|}^b = 1 - d' \bar{a}'_{x+t+1|\bar{n}-t-1|}$ sind. (32) lässt sich dann wie folgt darstellen

$$\left. \begin{aligned} &Kv \frac{D_{x+2}^d}{D_x^d} \left\{ 1 - s_{x+2} \left(1 - \frac{q_{x+2}}{2} \right) d' \bar{a}'_{x+3|\bar{n}-3|} \right\} + \quad (a) \\ &+ K \left\{ \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d - \frac{d}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d (t-1) - \right. \\ &\left. - \frac{e_3}{D_x^d} s \sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d (t-1) d' \bar{a}'_{x+t+1|\bar{n}-t-1|} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (b) \quad (79)$$

mit

$$e_3 = \frac{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (t-1) d' \bar{a}'_{x+t+1|\bar{n}-t-1|}}{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d s_{x+t} (t-1) d' \bar{a}'_{x+t+1|\bar{n}-t-1|}}.$$

c_3 wird am besten durch $\left(1 - \frac{q_\mu}{2}\right)$ approximiert, wenn man $\mu = x + 3 + \left[\frac{n-3}{2}\right]$ wählt. Der Altersindex μ ist gegenüber μ_2 in (53a) etwas nach oben verschoben, weil die „höheren Glieder“ in c_3 durch den Faktor $(t-1)$ ein grösseres Gewicht als in c_2 erlangen.

(79)-(a) kann ohne grosse Mühe exakt berechnet werden.

Die Werte der einzelnen Summen in (79)-(b) werden dagegen wiederum nur approximativ ermittelt. Die Näherungen für

$$\frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \text{ und } \frac{d}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d (t-1)$$

sind im wesentlichen schon früher besprochen worden und erfordern daher keine Erläuterung mehr. Die Näherungen für

$$\frac{c_3}{D_x^d} s \sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d (t-1) d' \bar{a}'_{x+t+1; \overline{n-t-1}}$$

sind analog gebaut wie die rechten Seiten der Formeln (60) und (64); an Stelle der H_k''' treten lediglich die Parameter $\bar{H}_k'''$, die ebenfalls durch (54a) definiert sind, wobei $f_{x+3+t} = v(t+2) d' \bar{a}'_{x+4+t; \overline{n-4-t}}$ zu setzen ist, d. h. es gilt

$$\bar{H}_k''' = \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} (t+2) \binom{t}{k} D_{x+3+t} v d' \bar{a}'_{x+4+t; \overline{n-4-t}}. \quad (80)$$

Die $\bar{H}_k'''$ lassen sich in einfacher Weise durch die $\bar{H}_k'''$ ausdrücken. Führen wir nämlich (75) in (80) ein und beachten wir (78), dann erhalten wir nach kurzer Umformung

$$\bar{H}_k''' = \frac{d' \bar{a}'_{x \overline{n}}}{1 + \bar{a}} \} (k+1) \bar{H}_{k+1}''' + (k+2) \bar{H}_k''' \}.$$

Nach der Bestimmung von G findet man die Stornogewinnprämie durch sinngemässe Anwendung von Formel (72). Die Auswirkungen

des Stornos auf die Höhe der Bonusse ergeben sich schliesslich aus (37), wobei die rechte Seite dieser Gleichung – von p abgesehen – unter unseren speziellen Voraussetzungen die Form von (79) annimmt. Der Wert von (79) ist von der Approximation von G her näherungsweise bekannt und bedarf also keiner Berechnung mehr.

§ 2

Die Versicherung auf bestimmte Verfallzeit

Die Näherungsformeln zur Ermittlung des Barwertes der Stornogewinne und seines Einflusses auf Prämie und Gewinnanteil bzw. Bonus lassen sich in grundsätzlich gleicher Weise wie im vorigen Paragraphen gewinnen. Wir verzichten daher, das Näherungsverfahren für diese Versicherungsform eingehend darzulegen. Einzig im Hinblick auf die numerischen Beispiele in Abschnitt IV sei der Gang der Rechnung kurz zusammengefasst. Gewinnplan III (Bonussystem) wird nicht mehr berücksichtigt.

Wir stellen in (44), der genauen Formel für den Barwert der Stornogewinne, die einzelnen Summen durch je zwei Teilsummen dar – entsprechend wie in (52) –, indem wir die Summationen in zwei Schritten vornehmen, nämlich von $t = 0$ bis $t = 2$ und von $t = 3$ bis $t = n - 1$. Die abhängigen Stornowahrscheinlichkeiten lassen sich mit denselben Mitteln wie in § 1 aus der Rechnung ausschalten; für die Grössen

$$c'_1 = \frac{\sum_{t=0}^2 v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}U_{x|\overline{n}|})}{\sum_{t=0}^2 v D_{x+t}^d s_{x+t} (v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}U_{x|\overline{n}|})} \quad \text{bzw.}$$

$$c'_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d {}^*s_{x+t} (v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}U_{x|\overline{n}|})}{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d s_{x+t} (v^{n-t-1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}U_{x|\overline{n}|})}$$

gelten dabei die gleichen Näherungen (53), (53a) wie für c_1 bzw. c_2 . Die Summationen über die ersten drei Versicherungsjahre werden im übrigen genau durchgeführt; die Summen über die folgenden Jahre werden nur approximativ berechnet.

Die Näherungsformeln für

$$\frac{(1-\beta)\pi_{x\bar{n}}}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \text{ und } \frac{1}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} D_{x+t}^d \Delta_{x+t}$$

können weitgehend aus § 1 übernommen werden und bedürfen keiner Herleitung mehr – insbesondere auch dann nicht, wenn die Dividenpläne I und II Geltung haben. Die Approximationen für

$$\frac{c_2'}{D_x^d} \sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t}^d (v^{n-t-1} + \gamma \bar{a}_{\overline{n-t-1}|} - {}_{t+1}U_{x\bar{n}}) \quad (81)$$

haben ein nämlches Aussehen wie die rechten Seiten der Beziehungen (60) und (64); die Parameter sind diesmal durch

$$\left. \begin{aligned} H_k''' &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \binom{t}{k} D_{x+3+t} v (v^{n-4-t} + \gamma \bar{a}_{\overline{n-4-t}|} - {}_{t+4}U_{x\bar{n}}) = \\ &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=k}^{n-4} \sum_{t_1=t}^{n-4} \cdots \sum_{t_k=t_{k-1}}^{n-4} D_{x+3+t_k} v (v^{n-4-t_k} + \gamma \bar{a}_{\overline{n-4-t_k}|} - \\ &\quad - {}_{t_k+4}U_{x\bar{n}}) \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

festgelegt.

In den praktischen Beispielen wird in (81) ausnahmslos ${}_{t+1}U_{x\bar{n}} = {}_{t+1}V'_{x\bar{n}}(\bar{a})$ gesetzt; in (82) gilt dann durchwegs

$${}_{t_k+4}U_{x\bar{n}} = {}_{t_k+4}V'_{x\bar{n}}(\bar{a}) = v'^{n-4-t_k} - \frac{v'^n + \bar{a}}{\bar{a}'_{x\bar{n}}} \bar{a}'_{x+4+t_k:\overline{n-4-t_k}}.$$

Dem Umstande, dass die Abgangsentschädigungen auch nach dem dritten Versicherungsjahr noch von der Zillmerreserve abweichen

können, ist gegebenenfalls auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphen Rechnung zu tragen.

Die Formeln zur näherungsweise Ermittlung der Stornoauswirkungen auf Prämie und Gewinnanteil lauten vollkommen gleich wie die entsprechenden Formeln bei der gemischten Versicherung.

§ 3

Die gemischte Versicherung auf das erste Leben bei zwei verbundenen Leben

Wir können – wie schon bei der genauen Rechnung in II, § 3 – vollständig auf die Ableitungen bei der gemischten Versicherung auf ein Leben verweisen (das Summenzuwachssystem soll dabei nicht mehr in die Betrachtungen einbezogen werden). Die gesuchten Näherungsformeln ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Näherungsformeln von § 1, wenn wir in diesen die Transformationen (50) ausführen. Insbesondere lässt sich auch die Berechnung der abhängigen Stornowahrscheinlichkeiten in der Formel für G auf demselben Wege wie in § 1 vermeiden. Wie die numerischen Beispiele gezeigt haben, sind nämlich für

$$c''_1 = \frac{\sum_{t=0}^2 v D_{x+t:y+t}^d {}^*s_{x+t:y+t} (1 - {}_{t+1}U_{xy\bar{n}})}{\sum_{t=0}^2 v D_{x+t:y+t}^d s_{x+t:y+t} (1 - {}_{t+1}U_{xy\bar{n}})} \quad \text{und}$$

$$c''_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t:y+t}^d {}^*s_{x+t:y+t} (1 - {}_{t+1}U_{xy\bar{n}})}{\sum_{t=3}^{n-1} v D_{x+t:y+t}^d s_{x+t:y+t} (1 - {}_{t+1}U_{xy\bar{n}})} .$$

– in Analogie mit (53), (53a) – die folgenden Näherungen durchaus genügend

$$\left. \begin{aligned} c_1'' &\sim \left(1 - \frac{q_{\mu_1 v_1}}{2}\right) \sim \left(1 - \frac{q_{\mu_1} + q_{v_1}}{2}\right), \\ c_2'' &\sim \left(1 - \frac{q_{\mu_2 v_2}}{2}\right) \sim \left(1 - \frac{q_{\mu_2} + q_{v_2}}{2}\right), \\ \text{wobei } \mu_1 &= x, \quad v_1 = y, \\ \mu_2 &= x + 3 + \left[\frac{n-3}{3}\right], \quad v_2 = y + 3 + \left[\frac{n-3}{3}\right] \text{ sind.} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Bei der praktischen Anwendung in IV ist einzig zu beachten, dass die für die Abfindungswerte massgebenden Netto- und Zillmerreserven nicht wie in § 1 genau, sondern nur näherungsweise berechnet werden, d. h. ${}_{t+1}U_{xy\bar{n}}$ nimmt nicht die exakten, sondern die mittels (51) genäherten Werte von $\frac{2}{3} {}_{t+1}V'_{xy\bar{n}}$ bzw. ${}_{t+1}V'_{xy\bar{n}}(\bar{a})$ an.

IV. Abschnitt

Numerische Auswertung der Formeln von Abschnitt II; Prüfung der Näherungsformeln von Abschnitt III

Die numerischen Beispiele beruhen auf folgenden Rechnungsannahmen – diese gelten für alle drei Versicherungsformen (gemischte Versicherung auf ein oder zwei Leben, Termefixe-Versicherung):

1. Sterblichkeit: Nach Erfahrungen der Basler Lebens-Versicherungsgesellschaft, BaVMF 1943–48;
2. Zinsfuss: 3% ;
3. Abschlusskosten: 50% der Versicherungssumme;
4. Inkassokosten: 3% der Barprämie;
5. Laufende Kosten: 2% der Versicherungssumme.
6. Gewinnanteile:

Gewinnplan I: Vom 4. Versicherungsjahre an wird ein konstanter, mit der Prämie zu verrechnender Gewinnanteil von 15% der Tarifprämie gewährt.

Gewinnplan II: Vom 3. Versicherungsjahre an wird ein jährlich gleichmässig steigender, mit der Prämie zu verrechnender Gewinnanteil ausgerichtet; der Dividendensatz sei zu Beginn 2% der Tarifprämie und werde jedes folgende Jahr um diesen Betrag erhöht.

Gewinnplan III: Dieser Gewinnplan ist einzig bei der gemischten Versicherung berücksichtigt worden. Die anwartschaftliche Versicherungsleistung wird vom 3. Versicherungsjahre an jährlich um einen konstanten Betrag erhöht, nämlich um 13.26% der

Versicherungssumme bei $x = 30$, $n = 30$ bzw. um 12.71‰ der Versicherungssumme bei $x = 40$, $n = 25^1$).

7. Storno: Es sind drei verschiedene Annahmen über den Verlauf des anomalen Abgangs getroffen worden. Die unabhängigen Stornowahrscheinlichkeiten wurden wie folgt gewählt:

	Variante A	Variante B	Variante C
im 1. Versicherungsjahr	0.06	0.08	0.12
im 2. Versicherungsjahr	0.02	0.03	0.05
im 3. Versicherungsjahr	0.03	0.04	0.06
im 4. und in den folgenden Versicherungsjahren	0.01	0.02	0.04

Im 3. Versicherungsjahre, in dem die Versicherung einen Rückkaufswert erlangt, ist der anomale Abgang im Vergleich zum Vorjahre etwas erhöht. – Die Stornowahrscheinlichkeiten in A und B dürften sich im Rahmen der normalerweise zu verzeichnenden Abgangshäufigkeiten bewegen. Die Werte in C stellen dagegen eher eine obere Grenze für die Stornowahrscheinlichkeiten dar, die in der Schweiz auch in wirtschaftlich ungünstigen Zeiten nicht während eines längeren Zeitraumes überschritten werden dürfte. Mit Variante C soll gleichsam der praktisch höchst mögliche Einfluss des Stornos auf Prämie und Gewinnanteil abgeschätzt werden.

8. Abfindungswerte: Der Abfindungswert entspricht in der Höhe dem Zillmerdeckungskapital der Versicherung, berechnet nach der schweizerischen Sterbetafel für Männer 1921–30, $2\frac{1}{2}\text{‰}$, Zillmersatz 40‰ ; er betrage jedoch mindestens $\frac{2}{3}$ des mit denselben Rechnungsgrundlagen ermittelten Nettodeckungskapitals. Bei Versicherungen mit Gewinnplan III wird eine zusätzliche Abgangsentschädigung in der Höhe der Bonusreserve ausgerichtet (= Nettoreserve für den gesamten bisher gewährten Summenzuwachs, eben-

¹⁾ Die Höhe der Bonusse ist jeweils so festgesetzt worden, dass die Tarifprämien $\pi_{x:n}$ bei den Gewinnplänen II und III übereinstimmen.

falls ermittelt mit S.M. 21/30, $2\frac{1}{2}\%$). - Bei der gemischten Versicherung auf das erste Leben werden die Netto- und Zillmerreserven nicht genau, sondern nur näherungsweise mittels (51) bestimmt.

Die Versicherungen sind frühestens am Ende des dritten Versicherungsjahres rückkaufsfähig; die in der Praxis übliche Regelung, wonach schon nach Ablauf des ersten Zehntels der Versicherungsdauer (aufgerundet auf ganze Jahre) im Stornofall eine Abgangsentschädigung vergütet wird, braucht bei längeren Vertragsdauern, wie wir sie unseren Beispielen zugrunde gelegt haben, nicht beachtet zu werden.

LEGENDE ZU DEN TABELLEN

(1) Gewinnplan.

(2) Berechnungsweise

E: Exakte Berechnung von $A: \pi_{x\overline{n}}^s$, $B: \Delta_1^s, \Delta_2^s, K^s$ mittels der in Abschnitt II hergeleiteten Formeln.

N1, N2: Näherungsweise Berechnung von $A: \pi_{x\overline{n}}^s$, $B: \Delta_1^s, \Delta_2^s, K^s$ mittels des in Abschnitt III dargelegten Verfahrens. Als Näherungsfunktionen werden bei *N1* ausschliesslich gebrochene lineare Funktionen, bei *N2* ausschliesslich gebrochene rationale Funktionen 2. Grades verwendet.

(3) Stornoverlauf.

(4) *A*: Tarifprämie für Summe 10000, ohne Berücksichtigung des Stornos als Abgangsursache.

B: Jährlicher Gewinnanteil bzw. jährliche Steigerung des Gewinnanteils (beide in % der Tarifprämie $\pi_{x\overline{n}}$), jährlicher Bonus (in ‰ der Versicherungssumme), gemäss den Gewinnplänen I, II und III, d.h. ohne Berücksichtigung der Stornogewinne.

(5) *A*: Tarifprämie für Summe 10000, mit Berücksichtigung des Stornos als Abgangsursache.

B: Gewinnanteil bzw. Steigerung des Gewinnanteils, Bonus, wenn die Stornogewinne zur Vergrösserung der Gewinnanteile bzw. zur Erhöhung der Bonusse Verwendung finden.

(6) Fehler der Näherungswerte für $A: \pi_{x\overline{n}}^s$, $B: \Delta_1^s, \Delta_2^s, K^s$ in ‰ der entsprechenden genauen Werte

$$\left(= \frac{\text{Näherungswert} - \text{genauer Wert}}{\text{genauer Wert}} \cdot 1000 \text{ ‰} \right).$$

(7) *A*: Stornogewinnprämie.

B: Jährlicher zusätzlicher Gewinnanteil bzw. jährliche zusätzliche Steigerung des Gewinnanteils, jährlicher zusätzlicher Bonus.

(8) Fehler der Näherungswerte für $A: \pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s$, $B: \Delta_1^s - \Delta_1, \Delta_2^s - \Delta_2, K^s - K$ in % der entsprechenden genauen Werte.

(9) Stornogewinnprämie in % der gewöhnlichen Tarifprämie $\pi_{x\overline{n}}$.

A. Der Einfluss der Stornogewinne auf die Tarifprämien

a) Gemischte Versicherung

$$x = 30, n = 30$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Ge.	Be.	St.	π	π^s	r. F.	$\pi - \pi^s$	r. F.	$\frac{\pi - \pi^s}{\pi} 100 \%$
I	E	A	319.18	321.07		— 1.89		— 0.59
		B		322.33		— 3.15		— 0.99
		C		325.08		— 5.90		— 1.85
	N1	A		321.07	—	— 1.89	—	— 0.59
		B		322.33	—	— 3.15	—	— 0.99
		C		325.20	0.4	— 6.02	2.0	— 1.89
	N2	A		321.07	—	— 1.89	—	— 0.59
		B		322.32	— 0.0	— 3.14	— 0.3	— 0.98
		C		325.06	— 0.1	— 5.88	— 0.3	— 1.84
II	E	A	357.37	353.96		3.41		0.95
		B		350.50		6.87		1.92
		C		344.95		12.42		3.48
	N1	A		353.94	— 0.1	3.43	0.6	0.96
		B		350.36	— 0.4	7.01	2.0	1.96
		C		344.16	— 2.3	13.21	6.4	3.70
	N2	A		353.96	—	3.41	—	0.95
		B		350.50	—	6.87	—	1.92
		C		345.07	0.3	12.30	— 1.0	3.44
III	E	A	357.37	357.80		— 0.43		— 0.12
		B		357.89		— 0.52		— 0.15
		C		358.36		— 0.99		— 0.28
	N1	A		357.80	—	— 0.43	—	— 0.12
		B		357.85	— 0.1	— 0.48	— 7.7	— 0.13
		C		358.20	— 0.4	— 0.83	— 16.2	— 0.23
	N2	A		357.80	—	— 0.43	—	— 0.12
		B		357.88	— 0.0	— 0.51	— 1.9	— 0.14
		C		358.38	0.1	— 1.01	2.0	— 0.28

$$\infty = 40, n = 25$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Ge.	Be.	St.	π	π^8	r. F.	$\pi - \pi^8$	r. F.	$\frac{\pi - \pi^8}{\pi} 100\%$
I	E	A	414.99	415.28		— 0.29		— 0.07
		B		415.32		— 0.33		— 0.08
		C		415.56		— 0.57		— 0.14
	N1	A		415.28	—	— 0.29	—	— 0.07
		B		415.34	0.0	— 0.35	6.1	— 0.08
		C		415.60	0.1	— 0.61	7.0	— 0.15
	N2	A		415.28	—	— 0.29	—	— 0.07
		B		415.34	0.0	— 0.35	6.1	— 0.08
		C		415.60	0.1	— 0.61	7.0	— 0.15
	E	A	444.42	440.52		3.90		0.88
		B		436.85		7.57		1.70
		C		430.43		13.99		3.15
	N1	A		440.51	— 0.0	3.91	0.3	0.88
		B		436.80	— 0.1	7.62	0.7	1.71
		C		429.99	— 1.0	14.43	3.1	3.25
	N2	A		440.52	—	3.90	—	0.88
		B		436.88	0.1	7.54	— 0.4	1.70
		C		430.54	0.3	13.88	— 0.8	3.12
III	E	A	444.42	443.96		0.46		0.10
		B		443.43		0.99		0.22
		C		442.52		1.90		0.43
	N1	A		443.97	0.0	0.45	— 2.2	0.10
		B		443.43	—	0.99	—	0.22
		C		442.45	— 0.2	1.97	3.7	0.44
	N2	A		443.97	0.0	0.45	— 2.2	0.10
		B		443.45	0.0	0.97	— 2.0	0.22
		C		442.58	0.1	1.84	— 3.2	0.41

b) Versicherung auf bestimmte Verfallzeit

$$x = 30, n = 30$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Ge.	Be.	St.	π	π^s	r.F.	$\pi - \pi^s$	r.F.	$\frac{\pi - \pi^s}{\pi} 100\%$
I	E	A	306.06	308.25		— 2.19		— 0.72
		B		309.75		— 3.69		— 1.21
		C		312.93		— 6.87		— 2.24
	N1	A		308.25	—	— 2.19	—	— 0.72
		B		309.77	0.1	— 3.71	0.5	— 1.21
		C		313.11	0.6	— 7.05	2.6	— 2.30
	N2	A		308.25	—	— 2.19	—	— 0.72
		B		309.74	— 0.0	— 3.68	— 0.3	— 1.20
		C		312.90	— 0.1	— 6.84	— 0.4	— 2.23
	E	A	342.68	339.83		2.85		0.83
		B		336.82		5.86		1.71
		C		332.06		10.62		3.10
	N1	A		339.81	— 0.1	2.87	0.7	0.84
		B		336.71	— 0.3	5.97	1.9	1.74
		C		331.36	— 2.1	11.32	6.6	3.30
	N2	A		339.82	— 0.0	2.86	0.4	0.83
		B		336.82	—	5.86	—	1.71
		C		332.16	0.3	10.52	— 0.9	3.07

c) Gemischte Versicherung auf das erste Leben

$$x = y = 40, n = 25$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Ge.	Be.	St.	π	π^s	r. F.	$\pi - \pi^s$	r. F.	$\frac{\pi - \pi^s}{\pi} 100\%$
I	E	A	459.31	458.43		0.88		0.19
		B		457.53		1.78		0.39
		C		455.98		3.33		0.73
	N1	A		458.44	0.0	0.87	— 1.1	0.19
		B		457.58	0.1	1.73	— 2.8	0.38
		C		456.00	0.0 ¹⁾	3.31	— 0.6 ¹⁾	0.72
	N2	A		458.43	—	0.88	—	0.19
		B		457.58	0.1	1.73	— 2.8	0.38
		C		456.14	0.4	3.17	— 4.8	0.69
II	E	A	487.89	482.69		5.20		1.07
		B		477.96		9.93		2.04
		C		469.62		18.27		3.74
	N1	A		482.66	— 0.1	5.23	0.6	1.07
		B		477.91	— 0.1	9.98	0.5	2.05
		C		469.18	— 0.9	18.71	2.4	3.83
	N2	A		482.70	0.0	5.19	— 0.2	1.06
		B		478.00	0.1	9.89	— 0.4	2.03
		C		469.84	0.5	18.05	— 1.2	3.70

¹⁾ Dieses bei Näherung 1, Variante C ungewöhnlich genaue Resultat ist auf den Umstand zurückzuführen, dass die Fehler der Näherungsfunktionen durch den Fehler der Approximation für e''_2 - Formeln (83) - zufällig weitgehend kompensiert werden.

B. Der Einfluss der Stornogewinne auf die Gewinnanteile bzw. Bonusse

a) Gemischte Versicherung

$$x = 30, n = 30$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Ge.	Be.	St.	Δ_1, Δ_2 K	Δ_1^s, Δ_2^s K^s	r. F.	$\Delta_1^s - \Delta_1$ $\Delta_2^s - \Delta_2$ $K^s - K$	r. F.
I	E	A	15	14.37		- 0.63	
		B		13.92		- 1.08	
		C		12.87		- 2.13	
	N1	A		14.37	—	- 0.63	—
		B		13.92	—	- 1.08	—
		C		12.82	- 3.9	- 2.18	2.3
	N2	A		14.37	—	- 0.63	—
		B		13.93	0.7	- 1.07	- 0.9
		C		12.88	0.8	- 2.12	- 0.5
II	E	A	2	2.074		0.074	
		B		2.162		0.162	
		C		2.349		0.349	
	N1	A		2.074	—	0.074	—
		B		2.166	1.9	0.166	2.5
		C		2.378	12.3	0.378	8.3
	N2	A		2.074	—	0.074	—
		B		2.162	—	0.162	—
		C		2.345	- 1.7	0.345	- 1.1
III	E	A	13.26	13.19		- 0.07	
		B		13.17		- 0.09	
		C		13.08		- 0.18	
	N1	A		13.19	—	- 0.07	—
		B		13.18	0.8	- 0.08	- 11.1
		C		13.11	2.3	- 0.15	- 16.7
	N2	A		13.19	—	- 0.07	—
		B		13.17	—	- 0.09	—
		C		13.07	- 0.8	- 0.19	5.6

$$x = 40, n = 25$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Ge.	Be.	St.	Δ_1, Δ_2 K	Δ_1^s, Δ_2^s K^s	r. F.	$\Delta_1^s - \Delta_1$ $\Delta_2^s - \Delta_2$ $K^s - K$	r. F.
I	E	A	15	14.92		— 0.08	
		B		14.91		— 0.09	
		C		14.84		— 0.16	
	N1	A		14.92	—	— 0.08	—
		B		14.91	—	— 0.09	—
		C		14.83	— 0.7	— 0.17	6.3
	N2	A		14.92	—	— 0.08	—
		B		14.91	—	— 0.09	—
		C		14.82	— 1.3	— 0.18	12.5
	E	A	2	2.085		0.085	
		B		2.177		0.177	
		C		2.378		0.378	
II	N1	A		2.085	—	0.085	—
		B		2.178	0.5	0.178	0.6
		C		2.393	6.3	0.393	4.0
	N2	A		2.085	—	0.085	—
		B		2.176	— 0.5	0.176	— 0.6
		C		2.374	— 1.7	0.374	— 1.1
III	E	A	12.71	12.78		0.07	
		B		12.87		0.16	
		C		13.03		0.32	
	N1	A		12.78	—	0.07	—
		B		12.87	—	0.16	—
		C		13.05	1.5	0.34	6.3
	N2	A		12.78	—	0.07	—
		B		12.87	—	0.16	—
		C		13.02	— 0.8	0.31	— 3.1

b) Versicherung auf bestimmte Verfallzeit

$$x = 30, n = 30$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Ge.	Be.	St.	Δ_1, Δ_2	Δ_1^s, Δ_2^s	r. F.	$\Delta_1^s - \Delta_1$ $\Delta_2^s - \Delta_2$	r. F.
I	E	A	15	14.24		- 0.76	
		B		13.69		- 1.31	
		C		12.41		- 2.59	
	N1	A		14.24	—	- 0.76	—
		B		13.68	- 0.7	- 1.32	0.8
		C		12.34	- 5.6	- 2.66	2.7
	N2	A		14.24	—	- 0.76	—
		B		13.69	—	- 1.31	—
		C		12.42	0.8	- 2.58	- 0.4
II	E	A	2	2.064		0.064	
		B		2.144		0.144	
		C		2.312		0.312	
	N1	A		2.065	0.5	0.065	1.6
		B		2.147	1.4	0.147	2.1
		C		2.338	11.2	0.338	8.3
	N2	A		2.065	0.5	0.065	1.6
		B		2.144	—	0.144	—
		C		2.308	- 1.7	0.308	- 1.3

c) Gemischte Versicherung auf das erste Leben

$$x = y = 40, n = 25$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Ge.	Be.	St.	A_1, A_2	A_1^s, A_2^s	r. F.	$A_1^s - A_1$ $A_2^s - A_2$	r. F.
I	E	A	15	15.21		0.21	
		B		15.44		0.44	
		C		15.87		0.87	
	N1	A		15.21	—	0.21	—
		B		15.43	— 0.6	0.43	— 2.3
		C		15.87	— ¹⁾	0.87	— ¹⁾
	N2	A		15.21	—	0.21	—
		B		15.43	— 0.6	0.43	— 2.3
		C		15.83	— 2.5	0.83	— 4.6
II	E	A	2	2.110		0.110	
		B		2.223		0.223	
		C		2.474		0.474	
	N1	A		2.110	—	0.110	—
		B		2.225	0.9	0.225	0.9
		C		2.490	6.5	0.490	3.4
	N2	A		2.110	—	0.110	—
		B		2.222	— 0.4	0.222	— 0.4
		C		2.468	— 2.4	0.468	— 1.3

¹⁾ Vgl. Fussnote 1, S. 66.

Die numerischen Beispiele beruhen auf Rechnungsannahmen, welche von den heute in der Praxis verwendeten Rechnungsgrundlagen (Sterblichkeit, Zinsfuß, Verwaltungskosten, Gewinnanteile) kaum erheblich abweichen. Da auch die Abfindungswerte in Anlehnung an praktisch übliche Abgangsentschädigungen festgelegt wurden, dürften die Ergebnisse dieser Beispiele von allgemeinem Interesse sein. Der Einfluss des Stornos auf Prämie und Dividende bzw. Bonus ist bei den drei betrachteten Gewinnplänen sehr unterschiedlich:

In der Mehrzahl der Beispiele mit konstanten Gewinnanteilen wird die gewöhnliche Tarifprämie infolge der Verluste bei vorzeitigen Austritten unzureichend. Diese Erfahrung steht im Gegensatz zu der oftmals vertretenen Auffassung, die Berücksichtigung des Stornos in der Prämienkalkulation führe immer zu einer Ermässigung der Tarifprämie. Es ist zwar allgemein bekannt, dass bei langen Vertragsdauern Austrittsverluste in den ersten Versicherungsjahren kaum zu vermeiden sind; doch wird meistens angenommen, diese Einbussen würden durch Stornogewinne in den späteren Versicherungsjahren mehr als ausgeglichen, so dass der Einbezug des Stornos in die Rechnung gleichwohl eine Verminderung der Prämien bewirke. Die Resultate unserer praktischen Beispiele zeigen, dass diese Annahme bei weitem nicht zutreffen muss. Bei der gemischten Versicherung sind wir den Ursachen der Stornoverluste etwas nachgegangen. Bei $x = 40$, $n = 25$ vermögen die gegen Ende der Versicherungszeit erzielten Stornogewinne die in den ersten zwei Dritteln der Versicherungsdauer erlittenen Verluste nicht vollständig zu kompensieren. Bei $x = 30$, $n = 30$ überwiegt die Abgangsentschädigung ${}_{t+1}U_{x\overline{n}}$ das vollständige Deckungskapital ${}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v$ sogar in sämtlichen Versicherungsjahren – abgesehen vom zweiten –, so dass sich sozusagen durchwegs Verluste bei vorzeitigen Austritten einstellen¹⁾. Wie auch die Stornowahrscheinlichkeiten festgesetzt werden, der Barwert der Stornogewinne ist daher praktisch immer negativ. Vergleichsweise ist bei $x = 30$, $n = 30$ der Abfindungswert verkleinert worden, indem die Zillmerquote zur Bestimmung des Rückkaufswertes von 40⁰/₀₀ auf 50⁰/₀₀ er-

¹⁾ Genau gleich verhält es sich bei dem nicht angeführten Beispiel $x = 20$, $n = 30$.

höht wurde, d. h. die nicht amortisierten Abschlusskosten sind im Stornofall in vollem Mass vom Austretenden zu tragen. Gleichwohl ergeben sich Austrittsverluste. Während nämlich $\pi_{x\overline{n}}$ unverändert 319.18 bleibt, beträgt $\pi_{x\overline{n}}^*$ immer noch bei Stornoannahme A: 320.58, B: 321.37, C: 323.20.

Die Stornoverluste bei Gewinnplan I sind demnach hauptsächlich auf den Umstand zurückzuführen, dass die Abgangsentschädigungen mittels S. M. 21/30, $2\frac{1}{2}\%$ berechnet werden und damit höhere Werte als die mit Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung ermittelten vollständigen Deckungskapitalien annehmen¹⁾. Zur Verhütung von Verlusten müssen daher die Grundlagen zur Bestimmung der Rückkaufswerte in vermehrtem Masse den Tarifgrundlagen angeglichen werden – andernfalls sind, wenigstens theoretisch, die Gewinnanteile zu vermindern oder aber gar die Prämien zu erhöhen. Die Zweckmässigkeit des Grundsatzes, wonach die Abgangsvergütungen möglichst mit den Reservegrundlagen zu berechnen sind, ist somit u. U. in Frage gestellt.

In sämtlichen Beispielen mit gleichmässig steigenden Dividenden hat die Berücksichtigung des Stornos als Ausscheideursache eine Ermässigung der Tarifprämie bzw. eine Erhöhung der Gewinnanteile zur Folge. Das vollständige Deckungskapital ${}_{t+1}V_{x\overline{n}}^v$ ist wegen der höheren Dividendenreserve grösser als bei Gewinnplan I; es übertrifft für fast ausnahmslos jeden Wert von t die Abgangsvergütung ${}_{t+1}U_{x\overline{n}}$, so dass der Barwert der Stornogewinne immer positiv wird. Der Einfluss dieser Gewinne auf die Prämien oder Dividenden ist zwar bei den heutigen Stornoverhältnissen, die sich am ehesten durch die Stornoannahme A kennzeichnen lassen, relativ gering. Erst wenn der Storno Ausmasse wie in C annimmt, ergibt sich eine nennenswerte Prämienermässigung, welche dann immerhin die Höhe der jährlichen Inkassokosten überschreitet.

In den Beispielen mit dem Summenzuwachssystem (Gewinnplan III) hat der Storno auf die Prämien und Bonusse äusserst geringe Aus-

¹⁾ Werden zur Berechnung des Abfindungswertes neuere Rechnungsgrundlagen verwendet, beispielsweise S. M. 1948/53, $2\frac{1}{2}\%$ oder S. F. 1948/53, $2\frac{1}{2}\%$, dann ist der Abfindungswert im allgemeinen eher noch grösser und übertrifft deshalb erst recht das vollständige Deckungskapital.

wirkungen. Die Stornogewinnprämien sind teils positiv, teils auch negativ; ihre absoluten Beträge sind jedoch sehr klein. Die bei vorzeitigen Austritten frei werdenden vollständigen Deckungskapitalien vermögen nämlich, obwohl sie z.T. bedeutend grösser sind als bei Gewinnplan II, nur sehr knapp die Auslagen durch die Abgangvergütungen zu decken; diese enthalten bekanntlich zusätzlich zur Abgangsentschädigung für die vertragliche Versicherungsleistung auch die gesamte, und zwar ebenfalls mit Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung ermittelte Bonusreserve.

Die Ergebnisse der praktischen Beispiele berechtigen zu dem Schluss, dass der Einfluss des vorzeitigen Abgangs auf Prämie und Gewinnanteil bzw. Bonus bei den drei betrachteten Formen der Todes- und Erlebensfallversicherung in „normalen Zeiten“ verhältnismässig unbedeutend ist. Vom Einbezug des Stornos in die Prämienkalkulation kann im allgemeinen abgesehen werden. Immerhin mahnt der Umstand, dass bei gewissen Gewinnsystemen die vorzeitigen Vertragsauflösungen verteuern auf die Versicherung wirken können, zur Vorsicht. Trotz des damit verbundenen Arbeitsaufwandes ist von Zeit zu Zeit der Stornoeinfluss auf den Preis der Versicherung zum mindesten abzuschätzen, um grösseren Verlusten nötigenfalls durch eine Anpassung der Abfindungswerte begegnen zu können.

Die in Abschnitt III dargelegten Näherungsverfahren zur Bestimmung der zahlenmässigen Auswirkungen des Stornos auf Prämie und Gewinnanteil bzw. Bonus sind für die Praxis vollkommen ausreichend. Die relativen Fehler der Näherungswerte für $(\pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s)$, $(A_1^s - A_1)$, $(A_2^s - A_2)$ und $(K^s - K)$ sind z.T. zwar verhältnismässig hoch, doch können sie nur bedingt als Mass für die Güte der Approximationen betrachtet werden. Da die Differenzen $(\pi_{x\overline{n}} - \pi_{x\overline{n}}^s)$, $(A_1^s - A_1)$, $(A_2^s - A_2)$ und $(K^s - K)$ im allgemeinen nur kleine Werte annehmen, ist es nämlich möglich, dass auch bei geringen absoluten Fehlern grosse relative Abweichungen auftreten. – Wie zu erwarten war, wachsen die Fehler mit steigender Stornowahrscheinlichkeit s . Die Verwendung der gebrochenen rationalen Funktion 2. Grades als Näherungsfunktion – statt der gebrochenen linearen Funktion – führt bei hohen Stornowahrscheinlichkeiten (Variante C), vor allem bei Gewinnplan II, in der Regel zu einer merklichen Verbesserung der Näherungswerte.

Zusammenfassung

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit sei nochmals kurz dargelegt: Die Betrachtungen im ersten Abschnitt galten dem Storno als Ausscheideursache. Wir versuchten, uns Klarheit zu verschaffen über die wichtigsten Zusammenhänge zwischen den Stornohäufigkeiten und den sie beeinflussenden Umständen.

Im folgenden Abschnitt wurden die Formeln zur exakten Bestimmung der Auswirkungen des Stornos auf die Tarifprämien und Gewinnanteile hergeleitet, und zwar für die gemischte Versicherung auf ein oder zwei Leben sowie für die Termefixe-Versicherung. Für die praktische Anwendung dieser Formeln ist die Kenntnis der Abfallsordnung der Versicherten erforderlich. Wie den Ausführungen im ersten Abschnitt zu entnehmen ist, kann die Häufigkeit der vorzeitigen Vertragsauflösungen in der Zeit grösseren Schwankungen unterliegen. Für eine zuverlässige Abschätzung des Einflusses der vorzeitigen Austritte auf den Preis der Versicherung bedarf es daher einer Variation der Stornowahrscheinlichkeiten und somit einer mehrmaligen Erstellung der Dekremententafel der Versicherten¹⁾. Dies stellt aber eine nicht unbeträchtliche Rechenarbeit dar.

Im dritten Abschnitt haben wir deshalb den Versuch unternommen, ein Verfahren zu entwickeln, welches auch ohne Kenntnis der Dekremententafel den Storno in die Kalkulation der Prämien und Dividenden einzubeziehen erlaubt und daher gegenüber einer Variation der Stornogrundlagen ziemlich anpassungsfähig ist. Wir konnten unser Ziel weitgehend erreichen, indem wir die unabhängigen Stornowahrscheinlichkeiten vom vierten Versicherungsjahre an konstant annahmen. Damit war im wesentlichen der Weg geebnet, um die Auswirkungen des anomalen Abgangs auf Prämie und Gewinnausschüt-

¹⁾ Die Möglichkeit, dass sich eine Änderung des Stornos auch auf die Höhe der Zinserträge, der Sterblichkeit und der Verwaltungskosten auswirkt, muss aus praktischen Gründen wohl immer unberücksichtigt bleiben.

tung näherungsweise mit einer Methode zu ermitteln, die bekannten Verfahren zur Bestimmung des Leibrentenbarwertes bei variiertem Zinsfuss verwandt ist.

Im letzten Abschnitt haben wir schliesslich die praktische Verwendbarkeit des im dritten Abschnitt hergeleiteten Approximationsverfahrens mit einigen numerischen Beispielen belegt. Diese Beispiele vermitteln zugleich eine Vorstellung von der tatsächlichen Grösse und Bedeutung der infolge der Stornogewinne möglichen Prämienreduktionen bzw. Dividendenerhöhungen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. *B. Oster*: Die Stornofall-Versicherung. Bvm, 1. Band, 1928.
2. *F. Frisch*: Die zulässige Grenze der Abschlusskosten und der Zillmerquote. Va, Jahrgang 1, Nr. 7, 1930/31.
3. *F. Frisch*: Die Stornoverhältnisse in Österreich und in Ungarn vor dem Kriege (1876–1900). Va, Jahrgang 2, Nr. 5, 1931/32.
4. *K. Rasch*: Der regelwidrige Abgang in der schweizerischen Lebensversicherung. Dissertation 1931, Universität Bern.
5. *M. Jacob*: Il prezzo di riscatto e la teoria dei capitali accumulati. Atti del Secondo Congresso Nazionale di Scienza delle assicurazioni, Vol. II, Roma 1933.
6. *E. Zwinggi*: Deckungskapital und Storno. Aj, Band 54, 1935.
7. *L. Martin*: Withdrawal rates in the Connecticut Mutual. Tasa, Vol. 38, 1937.
8. *E. Zwinggi*: Die Gewinne aus der vorzeitigen Vertragsauflösung in der Lebensversicherung. Va, Jahrgang 9, Nr. 6, 1938/39.
9. *E. Zwinggi*: Zur Bestimmung der Abfindungswerte in der Lebensversicherung unter Anrechnung der Gewinnreserve. Kb XII, Band 2, Luzern 1940.
10. *G. Bonifacio*: Indagine statistica sullo storno nell'assicurazione vita. Kb XII, Band 3, Luzern 1940.
11. *H. Stowe*: Withdrawals in life insurance. Kb XII, Band 3, Luzern 1940.
12. *F. Sala*: Sulla preparazione del materiale per la rilevazione della frequenza degli storni nelle assicurazioni vita. Kb XII, Band 3, Luzern 1940.
13. *R. Taucer*: Lo storno nell'assicurazione sulla vita. Kb XII, Band 3, Luzern 1940.
14. *E. Gisi*: Der Einfluss des Stornos auf Tarifprämien, Deckungskapitalien und Gewinnanteilsätze der gemischten Versicherungen. Kb XII, Band 3, Luzern 1940.
15. *E. Zwinggi*: Untersuchungen über den Einbezug der vorzeitigen Vertragsauflösung in die Berechnung und Darstellung der Tarifprämie der Todes- und Erlebensfallversicherung. Mvsv, 43. Band, Heft 1, 1943.
16. *E. Zwinggi*: Der vorzeitige Abgang in der Lebensversicherung. Aj, Band 62, 1943.
17. *E. Zwinggi*: Versicherungsmathematik, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Basel 1945.
18. *E. Zwinggi*: Variation der Rechnungsgrundlagen in der Invalidenversicherung. Mvsv, 49. Band, Heft 1, 1949.
19. *Gb. Richardson & J. Hartwell*: Lapse rates. Tasa, Vol. 3, 1951.
20. *E. Zwinggi*: Beiträge zum Zinsfussproblem. Bdvm, Band 1, Heft 3, 1952.
21. *E. Zwinggi*: Un procedimento per determinare il saggio d'interesse di rendite vitalizie e rendite certe. Giia, Anno XV, 1952.
22. *F. Stobler*: Untersuchung über den Einbezug des Stornos in die Berechnung der Nettoprämie und des Nettodeckungskapitals der Krankenpflegeversicherung. Dissertation 1955, Universität Basel.

ABKÜRZUNGEN

Aj	Assekuranz-Jahrbuch
Bdvm	Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik
Bvm	Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete
Gia	Giornale dell' Instituto Italiano degli Attuari
Kb	Berichte der internationalen Kongresse der Versicherungsmathematiker
Mvsv	Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker
Tasa	Transactions of the Actuarial Society of America
Va	Versicherungs-Archiv

Lebenslauf

Ich, Jacques Paul Röthlisberger, wurde als Sohn des Paul Röthlisberger (Werkmeister) und der Lina, geb. Sehmam, am 17. Mai 1928 in Paris geboren. Heimatberechtigt bin ich in Basel und in Langnau (Kt. Bern).

Nach dem Besuch der Primarschule und des Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums in meiner Vaterstadt immatrikulierte ich mich nach bestandener Maturitätsprüfung im Frühjahr 1948 an der Universität Basel, um Versicherungslehre, Mathematik, Astronomie und Nationalökonomie zu studieren.

Ich besuchte Vorlesungen und Übungen bei den Herren Dozenten E. Batschelet, W. Becker, Th. Brogle, P. Buchner, B. Dukor, J. Fleckenstein, L. Furlan, J. Gantner, M. Gürtler, H. Lewald, H. Meng, A. Ostrowski, E. Probst, H. Renfer, E. Salin, E. Schubarth, A. Speiser, M. Staehelin, H. P. Tschudi, E. von der Pahlen, V. Wagner und E. Zwinggi.

Die vorliegende Arbeit ist unter Leitung von Herrn Prof. E. Zwinggi entstanden; für seine wohlwollende, mir während meiner ganzen Studienzeit gewährte Unterstützung bin ich ihm zu grossem Dank verpflichtet.

Gedruckt in Westdeutschland

